Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik

Wintersemester 2019/2020
Nachholtermin: 26. Juni 2020

Modulprüfung:
Lineare Algebra
für Lehramt an allgemeinbildenden Schulen

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6*	Σ
Punkte	16	10	10	10	10	5	56
erreicht							

Note: _____ Unterschrift des Prüfers: _____

Aufgabe 1 (16 Punkte – je 0.5 Punkte fürs Ankreuzen, 1.5 Punkt für die Begründung)
Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten knapp.

a) $(\mathbb{Z}_8,\ [0]_8,\ [1]_8,\ +,\ \cdot\ )$ ist ein Körper.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

b) Wenn $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, dann ist $\{v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_3\}$ ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

c) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} xy \\ x+y \end{smallmatrix}\right)$ ist linear.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

d) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Dann ist f nicht injektiv.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

e) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $n \geq 2$. Dann gilt $\det(2\mathbf{A}) = 2\det(\mathbf{A})$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

f) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_3^{(3,3)}$ mit $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $\det(\mathbf{AB}) = 0$ für alle $\mathbf{B} \in \mathbb{Z}_3^{(2,2)}$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

g) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von $\mathbf{A}$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

h) Sei $B = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ eine geordnete Basis des $\mathbb{R}^2$ und bezeichne f das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist ${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

Aufgabe 2 (10 = 6+2+2 Punkte)
Sei $\mu \in \mathbb{R}$. Gegeben seien eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot x = b$.

b) Geben Sie die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot x = 0$ an.

c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = \mathbf{A} \cdot x$. Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Bild}(f))$.

Hinweis: Beachten Sie, dass Ihre Antworten von μ abhängen.

Aufgabe 3 (10 = 4+6 Punkte)
Gegeben seien Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}_3^3$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie, ob $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{Z}_3^3$ bildet.

b) Seien $U_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ und $U_2 = \langle v_3 \rangle$ Unterräume von $\mathbb{Z}_3^3$. Geben Sie jeweils eine Basis sowie die Dimension von $U_1 + U_2$ sowie von $U_1 \cap U_2$ an.

Aufgabe 4 (10 = 2+8 Punkte)
Seien $E = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ und $B = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -5 \end{smallmatrix}\right))$ zwei geordnete Basen von $\mathbb{R}^2$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie $[f]_E^E$ an.

b) Geben Sie $[f]_B^B$ an, indem Sie Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}^{-1}$ ermitteln, sodass

$$[f]_B^B = \mathbf{P}^{-1} \cdot [f]_E^E \cdot \mathbf{P}.$$

Aufgabe 5 (10 = 4+2+3+1 Punkte)
Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$.

b) Finden Sie alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

c) Finden Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

d) Geben Sie eine Matrix $\mathbf{P}$ an, sodass

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 6 (5 Punkte, Bonusaufgabe)
Sei V ein Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V. Zeigen Sie:

$$U_1 \cup U_2 \text{ ist Unterraum von } V \quad \Longleftrightarrow \quad U_1 \subseteq U_2 \text{ oder } U_2 \subseteq U_1.$$