Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik

Sommersemester 2020
6. August 2020

Modulprüfung:
Lineare Algebra
für Lehramt an allgemeinbildenden Schulen

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6*	Σ
Punkte	16	10	10	10	10	5	56
erreicht							

Note: _____ Unterschrift des Prüfers: _____

Aufgabe 1 (16 Punkte – je 0.5 Punkte fürs Ankreuzen, 1.5 Punkt für die Begründung)
Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten knapp.

a) $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

b) Jedes homogene lineare Gleichungssystem ist lösbar.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

c) Für beliebige $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

d) Die Menge $U = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x = y + 1\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

e) Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^3$ ist surjektiv.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

f) Die Matrix $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}_5^{(3,3)}$ ist invertierbar.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

g) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit $\det(\mathbf{A}) = -2$. Dann gilt $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal) = 4$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

h) Die Semibilinearform $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)) = x_1 y_2$ ist symmetrisch.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

Aufgabe 2 (10 = 5+2+3 Punkte)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Gegeben seien eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie, für welche α das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot x = b$ lösbar ist, und untersuchen Sie, für welche α es unendlich viele Lösungen gibt. Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Lösen Sie $\mathbf{A} \cdot x = b$ für $\alpha = 1$.

c) Ermitteln Sie für $\alpha = 1$ und für $\alpha = 0$ die Lösung von $\mathbf{A} \cdot x = 0$.

Aufgabe 3 (10 = 4+4+1+1 Punkte)
Gegeben seien Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seien $U_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ und $U_2 = \langle v_3, v_4 \rangle$ Unterräume von $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $U_1 \cap U_2$.

c) Untersuchen Sie, ob $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$ ist, wobei $\oplus$ die direkte Summe bezeichne.

d) Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ an, sodass $\text{Bild}(f) = U_1$ ist.

Aufgabe 4 (10 = 1+5+3+1 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^4$ eine lineare Abbildung mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y \\ y+z \end{pmatrix}.$$

a) Seien E_3 und E_4 die kanonischen Basen von $\mathbb{Z}_2^3$ bzw. $\mathbb{Z}_2^4$. Geben Sie die Darstellungsmatrix $[f]_{E_4}^{E_3}$ an.

b) Bestimmen Sie die Dimension von Kern(f) und von Bild(f), und geben Sie eine Basis von Bild(f) an.

c) Untersuchen Sie f auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

d) Geben Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^2$ an, sodass Kern$(g \circ f) = \mathbb{Z}_2^3$.

Aufgabe 5 (10 = 4+3+2+1 Punkte)
Gegeben sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie mithilfe des charakteristischen Polynoms von $\mathbf{A}$, dass -2 und 2 die einzigen Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind.

b) Ermitteln Sie den Eigenraum von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert 2.

c) Untersuchen Sie, ob $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Begründen Sie, warum $\mathbf{A}$ invertierbar ist.

Aufgabe 6 (5 = 3+2 Punkte, Bonusaufgabe)

a) Es bezeichne $\mathbf{I}_n$ die Einheitsmatrix von $\mathbb{R}^{(n,n)}$. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine diagonalisierbare Matrix, deren Eigenwerte alle 1 oder -1 sind. Zeigen Sie:

$$\mathbf{A}^{2020} = \mathbf{I}_n.$$

b) Geben Sie eine Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ an, die den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 hat und für die $\mathbf{B}^2 \neq \mathbf{I}_2$ gilt.