

## Übungsblatt G-7 – Lösung der Aufgabe 3 b)

### Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende parameterabhängige lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_2 &= 3 \\ 4x_1 + \lambda x_3 &= \mu \end{aligned}$$

- a) Ermitteln Sie, für welche Werte  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  das Gleichungssystem lösbar ist. Für welche  $\lambda, \mu$  ist es sogar eindeutig lösbar?

**Lösung (Zsfg.):** Lösbar für  $\lambda \neq 4$  und  $\mu$  beliebig oder für  $\lambda = 4$  und  $\mu = 12$ , eindeutig lösbar für  $\lambda \neq 4, \mu$  beliebig.

- b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Systems für  $\lambda = 4, \mu = 12$ . Geben Sie auch die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an.

**Lösung:** Für  $\lambda = 4$  und  $\mu = 12$  ist das LGS nach a) lösbar, jedoch nicht eindeutig lösbar. Es gibt also unendlich viele Lösungen und wir können  $n - \text{Rang}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$  Variable frei wählen. Eine mögliche zeilenreduzierte Form von  $(A|b)$  sieht mit  $\lambda = 4$  und  $\mu = 12$  wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

In Gleichungsform geschrieben also:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich  $x_2 = 1$ . Setze  $x_3 = s, s \in \mathbb{R}$ . Einsetzen in die erste Zeile liefert  $x_1 + 1 + s = 4$  und damit  $x_1 = 3 - s$ . Damit ergibt sich folgende Lösungsmenge:

$$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - s \\ 1 \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

Das zugehörige homogene LGS ist  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ . Da die Umformungen dieselben wie beim inhomogenen LGS sind, können wir direkt das letzte Tableau übernehmen und die rechte Seite  $\mathbf{0}$  setzen:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile folgt nun  $x_2 = 0$ . Setze  $x_3 = s, s \in \mathbb{R}$ , dann folgt  $x_1 = -s$ . Als Lösungsmenge ergibt sich somit:

$$L_h = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Vergleich von  $L_i$  und  $L_h$  zeigt:

$$L_i = L_h + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D. h. um die Lösungsmenge  $L_i$  des inhomogenen LGS zu erhalten, wird zu jedem Vektor aus der Lösungsmenge  $L_h$  des homogenen LGS der Vektor  $(3 \ 1 \ 0)^T$  addiert.

Allgemein: Ist  $L_h$  die Lösungsmenge von  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , so hat jedes inhomogene LGS  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  eine Lösungsmenge der Struktur  $L_i = L_h + \mathbf{v}$  für einen Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $\mathbf{v}$  das inhomogene LGS löst, also  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ . D. h., die Lösungsmenge des inhomogenen Systems erhält man aus der Lösungsmenge des homogenen Systems durch Addition einer speziellen Lösung  $\mathbf{v}$ . Aus der Lösungsmenge des inhomogenen LGS lässt sich folglich die Lösungsmenge des homogenen LGS, ohne zu rechnen, ablesen.