Übungsblatt H–3

Hörsaalübung, 03. November 2017
Aussagen, Mengen, Summen und Produkte, Relationen und Abbildungen

Aufgabe 1

Aufgabe 3 a) sowie 4) und 5) der Hörsaalübung vom 27.10. (Übungsblatt H-2). Wir werden nur 3 a) besprechen, da 3 b) dieselbe Aussage ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie explizit die folgenden Summen:

a) $\sum_{i=2}^{5} i^2$ **b)** $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot i.$ **c)** $\prod_{i=3}^{5} (i+1)$

d) $\sum_{i=-2}^{3} \prod_{j=2}^{4} (i \cdot j)$ **e)** $\prod_{j=2}^{4} \sum_{i=-2}^{3} (i \cdot j)$

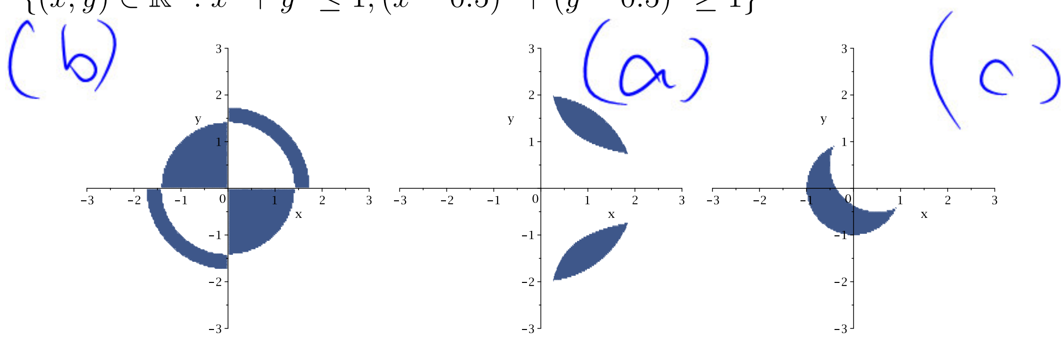
Aufgabe 3

Welche der folgenden algebraisch beschriebenen Mengen gehört zu welchem Bild?

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, xy^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2) \cdot x \cdot y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \geq 1\}$



Aufgabe 4

Gegeben seien die Mengen $A = \{1,2,3,4\}$ sowie $B = \{5,6,7,8\}$. Welche der folgenden Relationen in $A \times B$ beschreiben Abbildungen? Entscheiden Sie jeweils, ob die Abbildungen gegebenenfalls injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

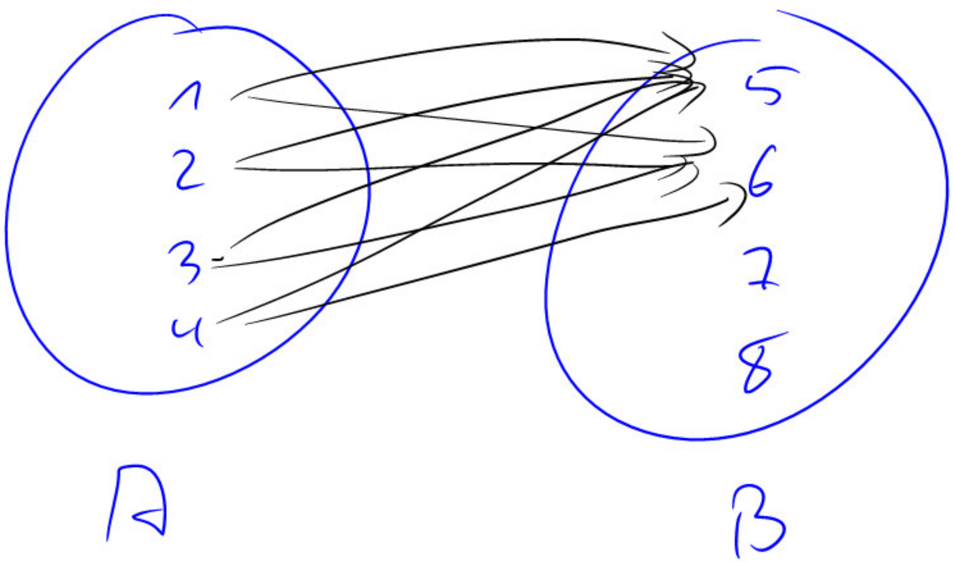
a) $A \times \{5,6\}$ **b)** $\{(i,j) : i \leq j\}$

c) $\{(i,j) : i^2 \in B\}$ **d)** $\{(i,j) : j - i = 4\}.$

e) $\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$ **f)** $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$

H-3 Aufgabe 4 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$

(a) $A \times \{5, 6\} \subseteq A \times B$



$A \times \{5, 6\}$

keine Abbildung, weil z.B. $(1, 5), (1, 6) \in A \times \{5, 6\}$

b) $\{(i, j) : i \leq j\} = A \times B$

i in $A = \{1, 2, 3, 4\}$

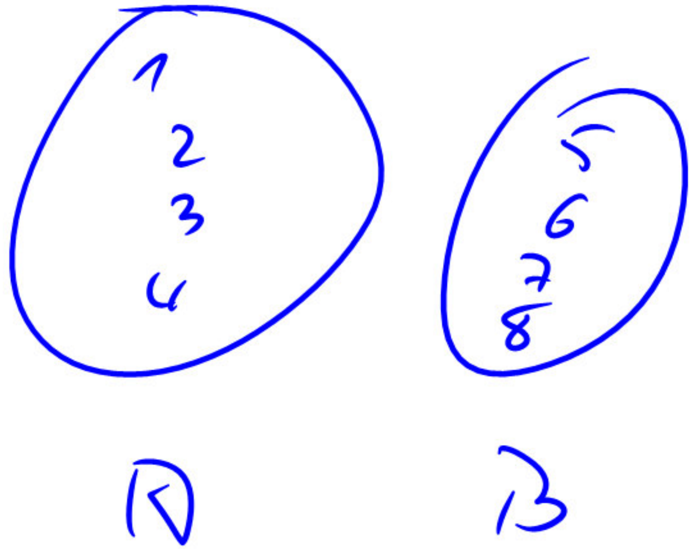
j in $B = \{5, 6, 7, 8\}$

weil jedes $i \in A$ kleiner oder gleich $j \in B$ ist (j beliebig)

keine Abbildung (Begründung wie (a))

c) $\{(i,j) : i^2 \in B\} = \{\ \}$

i in A, j in B



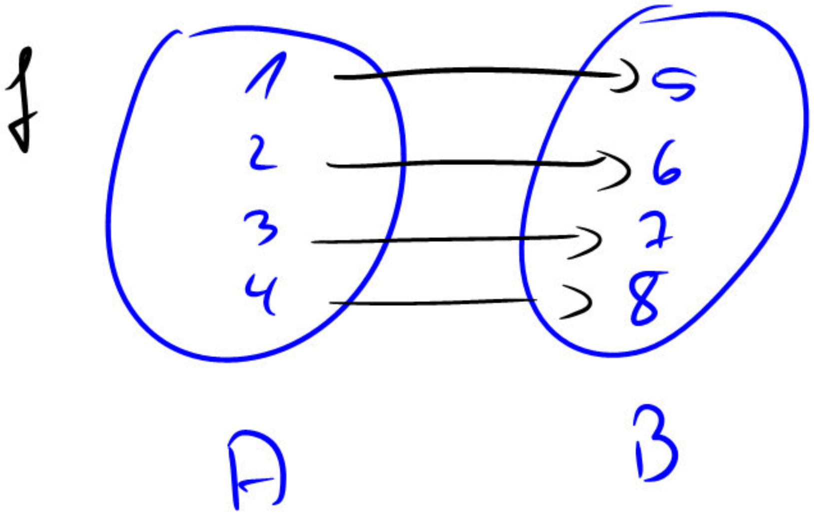
also Abbildung

injektiv

nicht surjektiv

Bem: Sonderfall

d) $\{(i,j) : j - i = 4\} = \{(1,5), (2,6), (3,7), (4,8)\}$

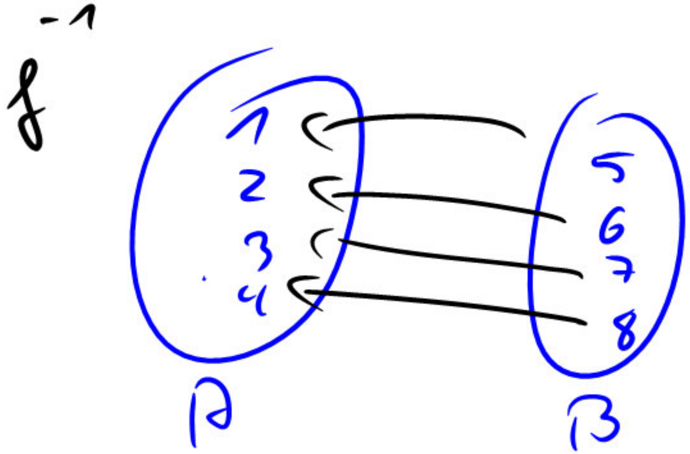


Abbildung

injektiv

surjektiv

bijektiv



$f \circ f^{-1}(x) = x$ für $x \in B$

$f^{-1} \circ f(x) = x$ für $x \in A$

e) nun: $f = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,6)\}$

ist Abbildung

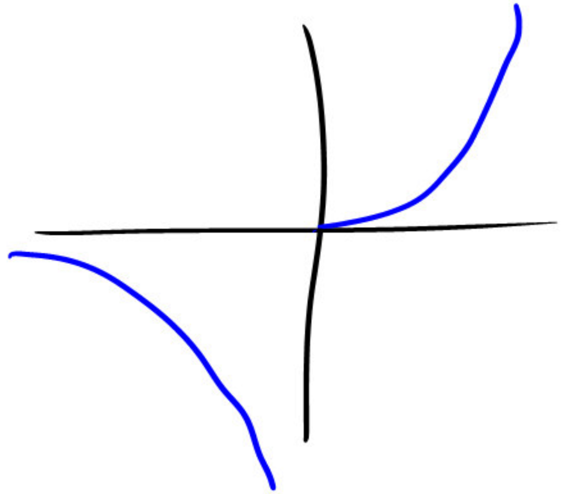
nicht injektiv, weil z.B. $f(1) = 5$
$f(2) = 5$

nicht surjektiv, weil es z.B. kein $x \in A$ gibt mit $f(x) = 7$

f) $\{(1,5), (1,6), (1,7), (1,8)\}$, keine Abbildg, weil ~~es~~ es zu 1 vier Elt. aus B gibt, die zu 1 in Relation stehen

H-4 Aufgabe 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{wenn } x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$



(a) f ist weder monoton fallend noch monoton steigend.

nicht monoton steigend: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$,
denn $x_2 > x_1$, aber $f(x_2) = -1 < f(x_1) = -\frac{1}{2}$

nicht monoton fallend: $x_2 = 1$, $x_1 = 0$
denn $x_2 > x_1$, aber $f(x_2) = 1 > f(x_1) = 0$

b) f ist surjektiv:

Zu zeigen: Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$.

Fall 1 $y \geq 0$ wähle $x = \sqrt{y}$, dann ≥ 0

$f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$

Fall 2 $y < 0$ wähle $x = \frac{1}{y}$, dabei gilt $x < 0$ (weil $y < 0$)

$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = y$

c) f injektiv:

zu zeigen: Wenn $f(x_1) = f(x_2)$, dann $x_1 = x_2$

Fall 1: $x_1, x_2 \geq 0$ $\quad f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = x_2^2$.

Wenn $x_1^2 = x_2^2$, dann muss $x_1 = x_2$ gelten, weil wir im Fall $x_1, x_2 \geq 0$ sind.

Fall 2: $x_1, x_2 < 0$ $\quad f(x_1) = \frac{1}{x_1}$, $f(x_2) = \frac{1}{x_2}$,

Wenn $f(x_1) = f(x_2)$, also $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, dann muss $x_1 = x_2$ gelten

Fall 3: Eine der Zahlen $x_1 < 0$, eine der Zahlen $x_2 \geq 0$

$f(x_1) = \frac{1}{x_1}$, $f(x_2) = x_2^2$.

Wenn $f(x_1) = f(x_2)$ . . . . . ?

!

unmöglich, denn $f(x_1) < 1$,

$f(x_2) \geq 0$, also $f(x_1) = f(x_2)$ unmöglich!

Fall 1, 2, 3 zusammen zeigen:

f injektiv.

d) f bijektiv, denn

f ist injektiv und f ist surjektiv

und zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $f(x)$

(nach Definition), d.h. $D(f) = \mathbb{R}$

e) Umkehrabbildung.

Löse $f(x) = y$ nach x auf:

Fall 1 $\quad y \geq 0$: $\quad f(x) = y = x^2, \quad x = \sqrt{y}$

Fall 2 $\quad y < 0$ $\quad f(x) = y = \frac{1}{x}, \quad x = \frac{1}{y}$

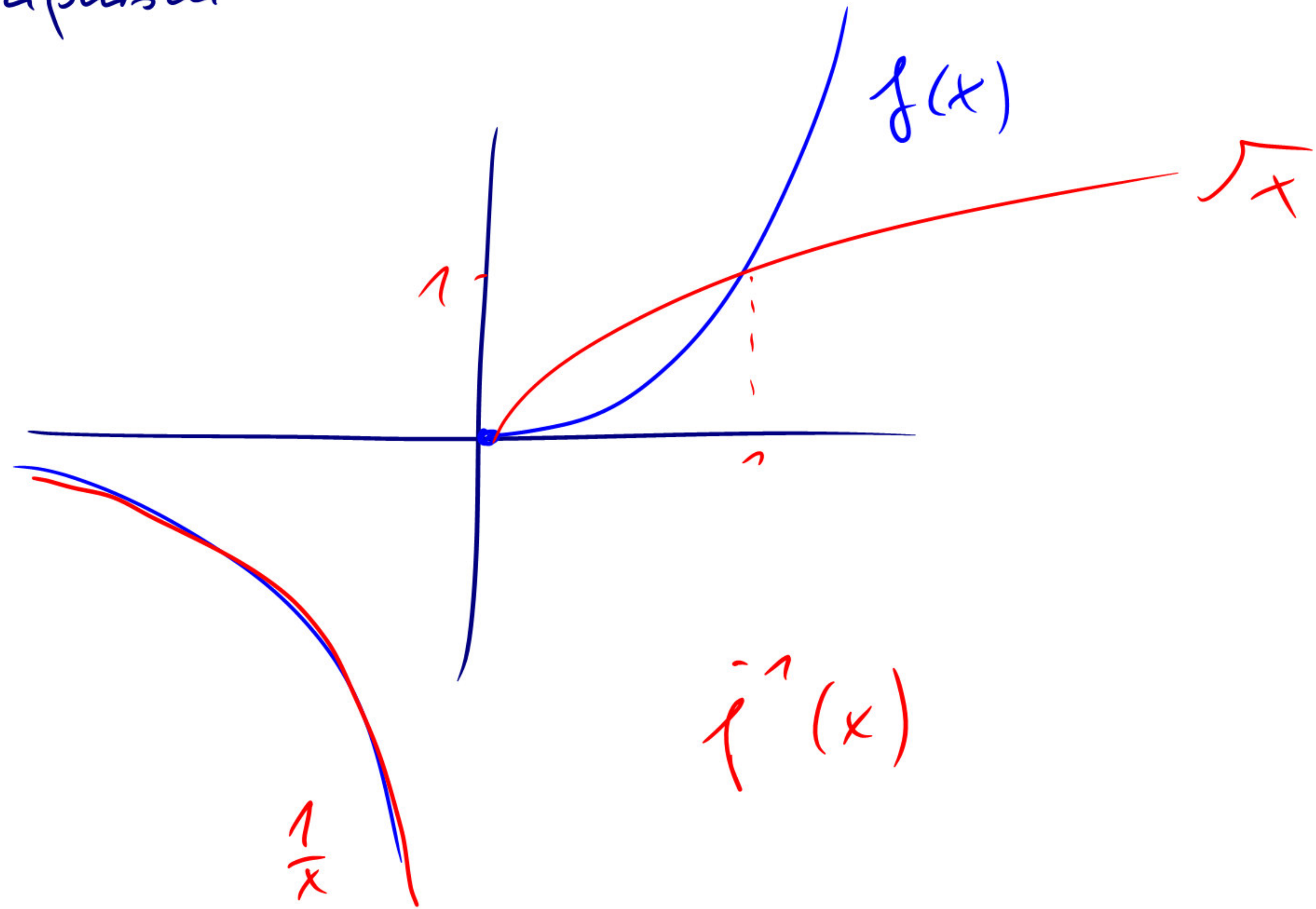
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{wenn } y \geq 0 \\ \frac{1}{y} & \text{wenn } y < 0 \end{cases}$$

Bem:

$$f \circ f^{-1}(y) = y \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

graphisch



Aufgabe 3.

$$f(x) = \frac{3x+6}{x-2} \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

(a) Definitionsbereich von f:

$$D(f) = \{x : x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\}$$

$$= (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

(b) Wertebereich von f

$$W(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$$

Ansatz: $f(x) = y$, <u>löse nach</u> <u>x auf</u>

$$\frac{3x+6}{x-2} = y \qquad \Big| \cdot (x-2)$$

$$3x + 6 = yx - 2y$$

$$3x - yx = -2y - 6$$

$$x(3-y) = -2y - 6$$

$$x = \frac{-2y-6}{3-y}$$ falls $y \neq 3$

3 liegt nicht in $W(f)$.

Problem: kann $x = \frac{-2y-6}{3-y}$ "zufällig"

2 sein. Das wäre ein Problem, weil

$2 \notin D(f)$

Nachrechnen: $2 = \frac{-2y-6}{3-y}$

$6 - 2y = -2y - 6$ geht nicht,

also kann 2 nicht zufällig $\frac{-2y-6}{3-y}$

sein.