3.2 Trigonometrische Funktionen

Vorbemerkung. Wir definieren die Winkelfunktionen bezogen auf die *Bogenlänge* x auf dem Einheitskreis, d.h. für $x \in [0, 2\pi]$. Alternativ werden die Argumente der Winkelfunktionen in *Winkelgraden* angegeben. Hier entspricht der Winkelgrad $\alpha = 360^o$ der Bogenlänge $x = 2\pi$, und Anteile am Vollkreiswinkel 360^o werden entsprechend in Anteile des Kreisumfangs umgerechnet:

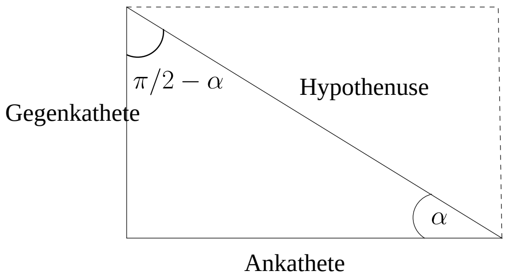
$$\alpha = \frac{360^o}{t} \text{ entspricht } x = \frac{2\pi}{t}$$

d.h. die Bogenlänge zum Winkel α ist $x = \dfrac{\pi}{180}\alpha$.

(i) **Sinus**
Als Winkelfunktion ist die Sinus-Funktion in folgender Weise definiert. Für einen Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$, wobei hier die (Längen der) Gegenkathete und Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit Scheitelwinkel α gemeint ist. Für $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ist $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$. Für $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ ist $\sin\alpha = -\sin(\alpha - \pi)$.

Ist $x \in \mathbb{R}$, dann schreiben wir $x = 2m\pi + \alpha$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, und setzen $\sin x = \sin\alpha$. Dadurch ist die Sinus-Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt. Sie ist periodisch mit Periode 2π, d.h. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Ihr Wertebereich ist

$$W(\sin) = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\} = [-1, 1].$$



Diese Skizze zeigt noch einmal die Größen, die bei der Definition der trigonometrischen Funktionen eine Rolle spielen.

(ii) **Cosinus:**
Als Winkelfunktion ist die Cosinus-Funktion in folgender Weise definiert. Für einen Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$, wobei hier die (Länge der) Ankathete bzw. Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit Scheitelwinkel α gemeint ist. Für $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ist $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$. Für $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ ist $\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$.

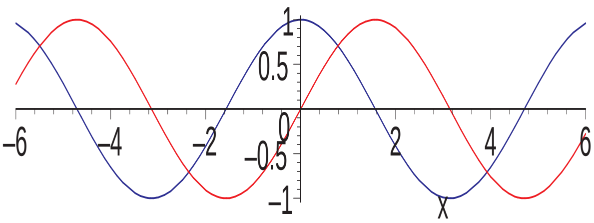


Abbildung 2: Graphen von $\sin x$ (rot) und $\cos x$ (blau)

Ist $x \in \mathbb{R}$, dann schreiben wir $x = 2m\pi + \alpha$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, und setzen $\cos x = \cos \alpha$.

Auch die Cosinus-Funktion ist periodisch mit Periode 2π. Ihr Wertebereich ist ebenfalls $W(\cos) = [-1, 1]$.

Es gilt

$$\boxed{\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})}$$

Das bedeutet, dass der Graph der Sinus-Funktion aus dem Graphen der Cosinus-Funktion durch Verschiebung um $\pi/2$ nach **rechts** entsteht.

(iii) **Tangens:**
Als Winkelfunktion ist die Tangens-Funktion für einen Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ definiert als $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ wobei hier die (Längen der) Gegenkathete und Ankathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit Scheitelwinkel α gemeint ist. Es ist also

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Wie vorher wird tan fortgesetzt, diesmal allerdings nur auf den Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi,\ m \in \mathbb{Z}\}$, und es ist

$$\tan : D \to \mathbb{R}\ ,\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

Als Wertebereich ergibt sich $W(\tan) = \mathbb{R}$. Der Tangens ist auf den Intervallen $(-\frac{\pi}{2} + z\pi, -\frac{\pi}{2} + z\pi)$, $z \in \mathbb{Z}$, streng monoton wachsend.

(iv) **Cotangens:**
Diese Funktion ist auf $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq m \cdot \pi,\ m \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
Als Wertebereich ergibt sich $W(\cot) = \mathbb{R}$. Der Cotangens ist streng monoton fallend auf den Intervallen $(z\pi, \pi + z\pi)$, $z \in \mathbb{Z}$.

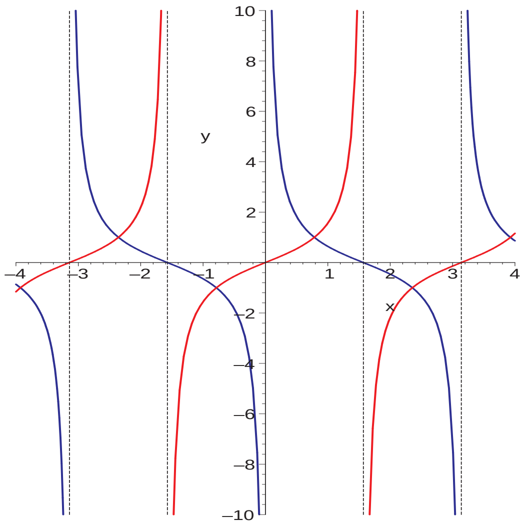


Abbildung 3: Graphen von $\tan x$ (rot) und $\cot x$ (blau)

Im folgenden Bild sind die Graphen für den **Tangens** rot und den **Cotangens** blau eingezeichnet.

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

1. Einige spezielle Werte sind

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$---$
cot	$---$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2. Periodizität:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x\ ,\ \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

3. Symmetrie:

$$\sin(-x) = -\sin x\ ,\ \cos(-x) = \cos x$$

(sin ist eine ungerade und cos eine gerade Funktion.)

4. Satz des Pythagoras: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

5. Additionstheoreme:

$$\begin{array}{rcl} \sin(x + y) & = & \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x + y) & = & \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{array}$$

6. Die trigonometrische Funktion tan ist streng monoton steigend auf $(-\pi/2, \pi/2)$ und die Funktion cot ist streng monoton fallend auf $(0/\pi)$ (und den entsprechend verschobenen Intervallen).

7. Verschiebungen um $\pi/2$ und π:

$$\begin{array}{rcl} \sin(x + \frac{\pi}{2}) & = & \cos(x) \\ \cos(x - \frac{\pi}{2}) & = & \sin(x) \\ \sin(x + \pi) & = & -\sin(x) \\ \cos(x + \pi) & = & -\cos(x) \\ \tan(x + \pi) & = & \tan(x) \\ \tan(x + \frac{\pi}{2}) & = & -\cot(x) \\ \cot(x + \frac{\pi}{2}) & = & -\tan(x) \\ \cot(x + \pi) & = & \cot(x) \\ \tan(x) & = & \frac{1}{\cot(x)}. \end{array}$$

4 Folgen und Stetigkeit

4.1 Folgen

Eine Folge ist eine durchnummerierte Zusammenfassung von reellen Zahlen. Sie wird geschrieben als

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Es ist also $a_n \in \mathbb{R}$. Der Index n gibt an, an welcher Stelle in der Folge die Zahl a_n steht.

Beispiel 4.1 1. Mit $a_n = n^2$ ist $a = (a_n) = (1, 4, 9, 16, \ldots)$ die Folge der Quadratzahlen in $\mathbb{N}$.

2. Mit $b_n = \frac{1}{n}$ ist $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ die Folge der sogenannten Hauptbrüche in $\mathbb{Q}$.

3. Mit $c_n = (-1)^n$ ist
   $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

4. Mit $d_n = 2^n$ ist
   $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots)$ die Folge der Zweierpotenzen.

5. Mit $y_n = \big(-\frac{1}{3}\big)^n$ ist

$$y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots\Big).$$

6. Ist $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, dann ist

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots\Big)$$

   Einige weitere Folgenglieder sind in der folgenden Tabelle angegeben:

n	1	10	100	1000
x_n	2	2.59374	2.70481	2.71692

n	10000	100000	1000000
x_n	2.71814	2.71826	2.71828

7. Die sogenannte *Fibonacci-Folge* ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ und } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 3.$$

   Die ersten Folgenglieder sind

$$a = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots).$$

   Die Zahl a_n heißt die n-te Fibonaccizahl.

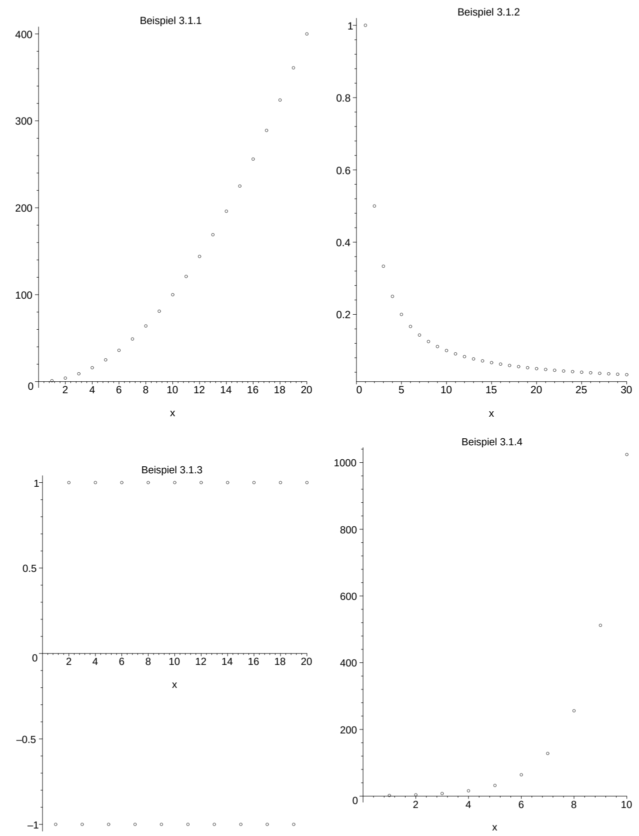
Folgen lassen sich auch als Abbildungen auffassen.

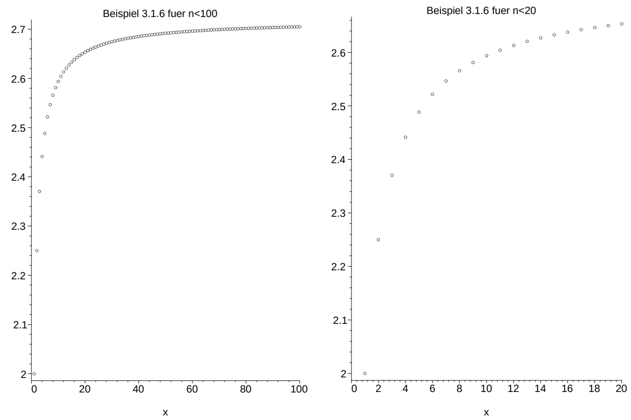
> Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$. Für den Wert $a(n)$ an der Stelle n schreibt man üblicherweise a_n. Der Wert a_n heißt n-tes Folgenglied von a.

Die Fibonacci-Folge heißt *rekursiv* definiert, da man zur Berechnung eines Folgenglieds a_n die vorherigen Folgenglieder benötigt (und Anfangswerte). Die anderen Folgen hingegen sind *explizit* definiert, da sich jedes a_n direkt aus dem Index n berechnen lässt. Man kann auch für die Fibonacci-Folge eine explizite Formel angeben. Man kann zeigen, dass die n-te Fibonacci-Zahl a_n

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

ist.
Wir können eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ graphisch veranschaulichen, indem wir die Punkte mit den Koordinaten (n, a_n) für einige Werte von n in ein Koordinatensystem zeichnen. Wir tun dies hier für die ersten sechs Beispiele.





Für uns in dieser Vorlesung sind die geometrischen Folgen sehr wichtig:

Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt **geometrisch**, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, wenn es also eine Zahl $q \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 4.2

- Die Folge aus Beispiel 4.1.4 ist geometrisch, denn

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

  Ebenso ist jede Folge mit der Vorschrift $d_n = q^n$ für ein festes $q \in \mathbb{R}$ geometrisch.

- Die anderen Folgen in Beispiel 4.1 sind nicht geometrisch. So ist etwa für die Folge mit $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{2}{3}, \text{ aber } \frac{b_4}{b_3} = \frac{3}{4}.$$

Für eine geometrische Folge mit dem konstanten Quotienten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

gilt $a_{n+1} = qa_n$ und daher

$$a_2 = qa_1, \quad a_3 = qa_2 = q^2a_1, \quad a_4 = qa_3 = q^3a_1$$

und allgemein $a_n = a_1q^{n-1}$ oder

$$\boxed{a_n = a_0q^n}$$

wobei $a_0 := \frac{a_1}{q}$. Wir können a_0 als das *nullte* Folgenglied auffassen. Eine geometrische Folge ist also vollständig durch den Quotienten q und einen Anfangswert a_0 (oder a_1) bestimmt.
Etwas weniger wichtig (und auch uninteressanter) sind die arithmetischen Folgen:

Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **arithmetisch**, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, wenn es also eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt

$$a_{n+1} - a_n = d \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 4.3 Die Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 3n - 7$ ist arithmetisch, denn

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 7 - \big(3n - 7\big) = 3 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die ersten Folgenglieder sind $-4, -1, 2, 5, 8, \ldots$.

Ist eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmetisch mit der konstanten Differenz

$$a_{n+1} - a_n = d \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

dann gilt $a_{n+1} = d + a_n$ und die einzelnen Folgenglieder ergeben sich durch

$$\begin{aligned} a_2 &= d + a_1, \\ a_3 &= d + a_2 = d + d + a_1 = 2d + a_1, \\ a_4 &= d + a_3 = 3d + a_1 \end{aligned}$$

und allgemein $a_n = (n-1)d + a_1$ oder

$$\boxed{a_n = nd + a_0}$$

wobei $a_0 = a_1 - d$ wie bei der geometrischen Folge als nulltes Folgenglied interpretiert werden kann. Eine arithmetische Folge ist also vollständig durch die Differenz d und einen Anfangswert a_0 (oder a_1) bestimmt.

Ähnlich wie für Abbildungen wollen wir nun die Begriffe Monotonie und Beschränktheit für Folgen erklären. Zusätzlich gibt es noch den Begriff der alternierenden Folge (machen Sie sich klar, dass die Begriffe Monotonie und Beschränktheit sowohl für Folgen als auch reelle Funktionen sinnvoll sind, alternierend aber für Abbildungen auf $\mathbb{R}$ nicht sinnvoll definiert werden kann).

- Eine Folge a heißt **konstant**, falls $a_{n+1} = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **monoton wachsend** bzw. **streng monoton wachsend**, falls

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ bzw. } a_{n+1} > a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **monoton fallend** bzw. **streng monoton fallend**, falls

$$a_{n+1} \leq a_n \text{ bzw. } a_{n+1} < a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Eine Folge heißt **alternierend**, falls ($a_{n+1} > 0$ ist wenn $a_n < 0$ ist) und ($a_{n+1} < 0$ wenn $a_n > 0$ ist). Anders gesagt: $a_{n+1}a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (die Folgenglieder wechseln also in jedem Schritt das Vorzeichen).

Beispiel 4.4

- Betrachte die Folgen aus Beispiel 4.1 Die Folgen a und d mit $a_n = n^2$ und $d_n = 2^n$ sowie die Fibonacci-Folge sind streng monoton wachsend.
- Die Folge b mit $b_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend.
- Die Folge c mit $c_n = (-1)^n$ ist weder monoton wachsend noch monoton fallend. Sie ist alternierend.
- Die Folge x mit $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist streng monoton wachsend. Das wird zumindest durch den Graphen angedeutet und es lässt sich auch nachrechnen.

Für die besonders wichtigen geometrischen Folgen ist das Monotonieverhalten wie folgt:

Sei $a_0 > 0$. Die geometrische Folge a mit $a_n = a_0q^n$ ist streng monoton wachsend, wenn $q > 1$ ist, streng monoton fallend, wenn $q \in (0, 1)$ ist, und konstant, wenn $q = 0$ oder $q = 1$ ist. Für $q < 0$ ist die geometrische Folge $a_n = a_0q^n$ alternierend.

Sei $a_0 < 0$. Die geometrische Folge a mit $a_n = a_0q^n$ ist streng monoton fallend, wenn $q > 1$ ist, streng monoton wachsend, wenn $q \in (0, 1)$ ist, und konstant, wenn $q = 0$ oder $q = 1$ ist. Für $q < 0$ ist die geometrische Folge $a_n = a_0q^n$ alternierend.

Beispiel 4.5

- Die Folge $a_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ist streng monoton fallend. Die ersten Folgenglieder sind

$$a_1 = \frac{5}{2},\ a_2 = \frac{5}{4},\ a_3 = \frac{5}{8},\ a_4 = \frac{5}{16},\ \ldots,\ a_{10} = \frac{5}{1024}.$$

- Für $a_n = 5\big(-\frac{1}{2}\big)^n$ erhalten wir

$$a_1 = -\frac{5}{2},\ a_2 = \frac{5}{4},\ a_3 = -\frac{5}{8},\ a_4 = \frac{5}{16},\ a_5 = -\frac{5}{32} \dots$$

Die Folge ist alternierend. Wir halten fest, dass die Folge $(|a_n|)$ der Beträge von a_n monoton fallend ist.

> Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **beschränkt**, falls es eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
> $$|a_n| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$
> d. h. alle Folgenglieder liegen im Intervall $[-M, M]$.

Beispiel 4.6

- Die Folgen a und d mit $a_n = n^2$ und $d_n = 2^n$ sowie die Fibonacci-Folge aus Beispiel 4.1 sind nicht beschränkt.
- Die Folge b mit $b_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt, denn $\left|\frac{1}{n}\right| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Die Folge c mit $c_n = (-1)^n$ ist beschränkt: $|(-1)^n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Eine geometrische Folge a mit $a_n = a_0 q^n$ ist unbeschränkt, wenn $|q| > 1$ ist und beschränkt, wenn $q \in [-1, 1]$ ist.

Zur Beschreibung des Verhaltens einer Folge bei wachsendem Index wird der Begriff **Konvergenz** eingeführt. Zunächst einige anschauliche Beispiele von Konvergenz.

Beispiel 4.7

- Die Folgenglieder aus Beispiel 4.1.1, 4.1.4 und 4.1.7 werden für wachsende n immer größer. Anders gesagt: “sie gehen nach $+\infty$”.
- Die Folgenglieder aus Beispiel 4.1.2 kommen für wachsende n immer näher an die x-Achse, anders: “die Werte kommen der Null immer näher”.
- In der Folge aus Beispiel 4.1.3 wechseln sich die Werte 1 und -1 ab. Die Folge kommt weder dem Wert 1 noch dem Wert -1 beliebig nahe, weil immer wieder der jeweils andere Wert angenommen wird.
- Die Folgenglieder aus Beispiel 4.1.5 wechseln sich mit dem Vorzeichen ab, aber wie in Beispiel 2 kommen die Werte der Null, also der x-Achse, immer näher.
- Der Graph der Folge aus Beispiel 4.1.6 deutet an, dass die Folgenglieder zwar stets anwachsen, aber nicht beliebig groß werden, sondern sich einem Wert nähern. Was ist der genaue Wert? Diesen Wert nennen wir den Grenzwert der Folge:

Grenzwert (Limes) von Folgen
Eine reelle Zahl a heißt **Grenzwert** oder **Limes** einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ einen von ε abhängigen Index $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n(\epsilon).$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt. In diesem Fall schreiben wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

Sprechweise: *Limes n gegen unendlich von a_n ist gleich a*, oder: *a_n konvergiert gegen a für n gegen unendlich.* Ist der Grenzwert $a = 0$, so heißt die Folge eine **Nullfolge**. Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie **divergent**. Man sagt auch *die Folge divergiert.* Wir können auch noch verschiedene Arten der Divergenz unterscheiden. Die Folge $a_n = n$ verhält sich sicherlich anders als die Folge $(-1)^n \cdot n$ oder $(-1)^n$.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent nach** ∞, falls es zu jedem M ein n_0 so gibt, dass

$$a_n \geq M \quad \text{ für alle } n \geq n_0,$$

gilt, d.h. die Folgenglieder werden beliebig groß. Entsprechend wird bestimmte Divergenz nach $-\infty$ erklärt.
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Achtung: Wir sagen nicht, dass die Folge gegen ∞ konvergiert. Wenn wir von Konvergenz sprechen, meinen wir stets Konvergenz gegen eine reelle Zahl, nie gegen $\pm\infty$!

Bestimmte Divergenz tritt sehr häufig auf bei Kehrwerten von Folgen mit Grenzwert 0:

Sei

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{eine Folge mit } a_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und und } \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

(entsprechend $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$ falls $a_n < 0$ für alle n gilt).

Es genügt hierbei, $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) erst ab einer gewissen Stelle $n \geq n_0$ zu fordern, weil bei Grenzwerten ja eh nur die Folgenglieder mit großem n eine Rolle spielen.
Man kann sich die Konvergenz gegen a auch folgendermaßen klar machen:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ nur *endlich* viele Folgenglieder *nicht* im Intervall $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ liegen; ein solches Intervall heißt auch eine *ϵ-Umgebung von a*.
Alternative Sprechweise: *fast alle* Folgenglieder (d.h. mit Ausnahme von höchstens endlich vielen) liegen im Intervall $[a-\epsilon, a+\epsilon]$. Insbesondere gibt es also nur einen Grenzwert für eine konvergierende Folge.

Beispiel 4.8

- Die Folge a mit $a_n = n^2$ aus Beispiel 4.1.1 ist divergent (bestimmte Divergenz nach ∞).
- Die Folge b mit $b_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.
- Die Folge c mit $c_n = (-1)^n$ ist divergent.
- Die Folge d mit $d_n = 2^n$ ist bestimmt divergent nach ∞.
- Die Folge y mit $y_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ist eine Nullfolge.
- Die Folge x mit $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ist konvergent, ihr Grenzwert ist die **Eulersche Zahl** e, also

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818$$

  Wir gehen darauf später noch genauer ein.
- Die Fibonacci-Folge ist bestimmt divergent gegen ∞.

Aus der Definition der Konvergenz folgt sofort

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Wir wollen im nächsten Beispiel das Konvergenzverhalten der arithmetischen und geometrischen Folgen sowie der Folgen $\frac{1}{n}$ und $\frac{(-1)^n}{n}$ zusammenfassen.

Beispiel 4.9

a_n	$a + nd$	$aq^n \quad (a > 0)$		$\frac{1}{n}$	$\frac{(-1)^n}{n}$
monoton steigend	$d \geq 0$	$q \geq 1$		nein	nein
streng monoton steigend	$d > 0$	$q > 1$		nein	nein
monoton fallend	$d \leq 0$	$0 \leq q \leq 1$		ja	nein
streng monoton fallend	$d < 0$	$0 < q < 1$		ja	nein
beschränkt	$d = 0$	$-1 \leq q \leq 1$		ja	ja
konvergent	$d = 0$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	ja	ja
Limes	a	0	a	0	0

Wir geben jeweils an, für welche Werte von a, d, q die Folgen die entsprechende Eigenschaft haben.

Ein sehr wichtiges **Konvergenzkriterium** ist das folgende:

> Jede beschränkte und monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, d.h. es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiel 4.10 Die Folge $\frac{3}{(n+1)}$ ist monoton (fallend) und beschränkt, also konvergent, und der Grenzwert ist 0. Die Folge $\frac{(-1)^{n^2}}{7n}$ ist nicht monoton (aber beschränkt). Diese Folge ist auch konvergent (ihr Grenzwert ist ebenfalls 0). Es kann also durchaus nicht monotone Folgen geben, die konvergieren. Unbeschränkt kann eine konvergente Folge aber nicht sein!

> **Rechenregeln für Grenzwerte**
>
> Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:
>
> 1. $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b\ .$$
> 2. $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b\ .$$

3. Sei $b \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ ist konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} .$$
4. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Folge $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a .$$

Wir geben gleich eine Menge an Beispielen an, wie wir die oben angegebenen Sachverhalte ausnutzen können. Wir müssen, grob gesagt, den algebraischen Ausdruck, der die Folgenglieder a_n definiert, in Teilausdrücke zerlegen, von denen wir dann jeweils die Grenzwerte kennen. Bevor wir zu den Beispielen kommen, hier ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium:

Ausquetschen Seien $(a'_n), (a''_n)$ konvergente Folgen mit
$$\lim_{n\to\infty} a'_n = a = \lim_{n\to\infty} a''_n .$$
Ist (a_n) eine Folge mit
$$a'_n \leq a_n \leq a''_n \quad \text{für alle } n ,$$
dann gilt auch
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a .$$

Als Spezialfall erhalten wir für Nullfolgen:

Sei (a'_n) eine Nullfolge. Ist (a_n) eine Folge mit
$$|a_n| \leq a'_n \quad \text{für alle } n ,$$
dann ist auch (a_n) eine Nullfolge.

Beispiel 4.11

(1) Für $k \in \mathbb{N}$ ist
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (3+\frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 3.$$

(3) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ ist
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

(4) Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
Bei dieser Folge hilft ein Umformungstrick weiter:
$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \tfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \tfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \tfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$
und daher ist
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

Warnung: Bei einem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ versuchen viele Anfänger etwa wie folgt zu argumentieren:
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = 0.$$
Das geht aber so nicht, weil der Grenzwert der Summe zweier Folgen nur dann die Summe der Grenzwerte dieser beiden Folgen ist, wenn die beiden Grenzwerte existieren. Das ist aber in unserem Beispiel nicht der Fall. Außerdem macht ein Ausdruck der Form "$\infty - \infty$" keinen Sinn! **Die oben angegebene Umformung ist somit falsch!!!** Überlegen Sie sich bitte, dass man mit so einem Argument "zeigen" könnte $\lim_{n\to\infty}((n+1)-n) = \lim_{n\to\infty}(n+1) - \lim_{n\to\infty}(n) = 0$, obwohl natürlich
$$\lim_{n\to\infty} (n+1-n) = \lim_{n\to\infty} (1) = 1 \quad \text{gilt.}$$

Beispiel 4.12 Als einen etwas komplizierteren Grenzwert wollen wir hier zeigen
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$
Dazu benötigen wir den binomischen Lehrsatz
$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}}$$
Hier ist
$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$
(gelesen: n über i), wobei
$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots 2 \cdot 1$$

die Fakultät von m ist (das ist das Produkt aller natürlichen Zahlen $\leq m$). Machen wir uns dies an einem Beispiel klar:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Der binomische Lehrsatz verallgemeinert also die binomischen Formeln (Spezialfall $n=2$).
Wir wollen etwas über die Konvergenz von $a_n = \sqrt[n]{n}$ aussagen. Dazu definieren wir $b_n = a_n - 1$ und berechnen $(b_n+1)^n$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$n = (b_n+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_n^i 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_n^i, \tag{4.1}$$

weil ja $b_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Die Gleichung (4.1) zeigt

$$\binom{n}{2} b_n^2 \leq n,$$

weil $b_n \geq 0$ (beachte: $a_n \geq 1$), also

$$\frac{n(n-1)}{2} b_n^2 \leq n, \text{ also } b_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Wegen $b_n \geq 0$ erhalten wir somit

$$0 \leq b_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

und deshalb ("Ausquetschen")

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{n\to\infty}(b_n+1) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Beispiel 4.13 Wir betrachten nun einen weiteren ganz wichtigen Grenzwert.

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828\ldots \\ \text{und} \quad &\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \end{aligned}}$$

Die Zahl e heißt **Eulersche Zahl**.
Wir wollen uns jetzt überlegen, warum $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ existiert, wir wollen also folgenden **Satz** beweisen:

Satz 4.1 Die Folge (a_n) mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konvergiert.

Dazu zeigen wir zunächst, dass die Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ beschränkt ist, und dazu benutzen wir, ähnlich wie in Beispiel 4.12, den binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \\
&< 1 + 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!}, \qquad \text{weil } n^i > n(n-1)\cdots(n-i+1) \\
&\leq 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}}, \qquad \text{weil } 2^{i-1} \leq i! \\
&< 3.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} < 1$, genauer:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 1. \tag{4.2}$$

Das ist nichts anderes als die mathematische Formulierung des Sachverhaltes, dass man einen Kuchen immer weiter halbieren kann: Man erhält dann $\frac{1}{2}$ Kuchen + $\frac{1}{4}$ Kuchen + $\frac{1}{8}$ Kuchen und so weiter bis $\frac{1}{2^{n-1}}$ Kuchen. Die letzten beiden Stücke haben aber dieselbe Größe $\frac{1}{2^n}$. Wenn man all diese $n+1$ Stücke zusammenfügt, hat man wieder den ganzen Kuchen. Wenn Sie wollen, können Sie die Gleichung (4.2) aber auch sauber mit Induktion beweisen. Was es mit Induktion auf sich hat, wollen wir nun erklären:

Angenommen, Sie wollen eine Aussage A beweisen, wobei die Aussage aber von $n \in \mathbb{N}$ abhängt, wie zum Beispiel die Aussage (4.2). Wir schreiben deshalb $A(n)$. Dann müssen Sie eigentlich unendlich viele Aussagen beweisen, nämlich $A(n)$ für jedes n. Das kann man aber vermeiden, indem man die Idee eines Induktionsbeweises benutzt. Sie beweisen $A(n)$ für ein n_0, meistens $n_0 = 1$. Wir nennen dies den **Induktionsanfang**.

Danach nehmen Sie an, die Aussage $A(n)$ gilt für ein beliebiges n, und sie beweisen, dass die Aussage dann auch für $A(n+1)$ gilt. Wir nennen dies den **Induktionsschritt**. Danach können Sie mit Fug und Recht behaupten: Die Aussage $A(n)$ gilt für alle $n \geq n_0$.

Wir benutzen das Induktionsprinzip hier, um die sogenannte **Bernoullische Ungleichung** zu beweisen:

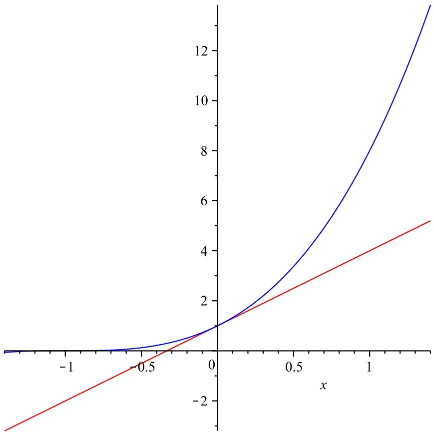
$$\text{Für alle } x > -1 \text{ und alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } (1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{4.3}$$

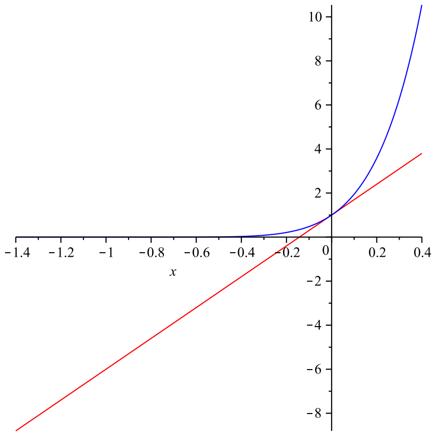
Induktionsanfang: Die Aussage (4.3) ist richtig für $n = 1$: $(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1 + (n+1)x + nx^2\\ &\geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Das erste Ungleichungszeichen in der zweiten Zeile dieser Umformungskette gilt, weil wir im Induktionsschritt ja gerade annehmen, dass die Aussage für n schon bewiesen ist! Das Ungleichungszeichen in der letzten Zeile gilt, weil x^2 stets ≥ 0 ist.
Die beiden folgenden Skizzen illustrieren noch einmal die Bernoullische Ungleichung: In den beiden Skizzen ist der rote Graph (die Gerade!) jeweils der von der Funktion $1 + nx$, wobei $n = 3$ in der ersten und $n = 7$ in der zweiten Skizze ist. Der blaue Graph beschreibt $(1 + x)^n$, natürlich wieder für $n = 3$ und $n = 7$. Man sieht, dass der blaue Graph oberhalb des roten Graphen verläuft. Das ist genau die Aussage der Bernoullischen Ungleichung.





Nun ist es nicht mehr schwer, die Monotonie von (a_n) zu zeigen. Um zu zeigen, dass (a_n) monoton wachsend ist, genügt es zu zeigen, dass $a_{n+1}/a_n \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} \\
&= (1+\frac{1}{n}) \cdot \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \\
&= (1+\frac{1}{n}) \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \\
&= (1+\frac{1}{n}) \cdot \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \\
&= (1+\frac{1}{n}) \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \\
&= (1+\frac{1}{n}) \cdot \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \\
&\geq (1+\frac{1}{n}) \cdot (1-\frac{n+1}{n^2+2n+1}) \text{ Bernoulli!} \\
&= (1+\frac{1}{n}) \cdot (1-\frac{1}{n+1}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit haben wir dann die Konvergenz der Folge (a_n) gezeigt.

4.2 Zusammenfassung

Wir fassen hier noch einmal die wichtigsten Grenzwerte zusammen:

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,$$

  sofern $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 0$. Wir haben das weiter vorne nur für $k \in \mathbb{N}$ notiert, das gilt aber für jede Zahl $k > 0$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$.