

## Klausur: Mathematische Methoden I Gruppe A

### Aufgabe 1 (6+3+1 Punkte)

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

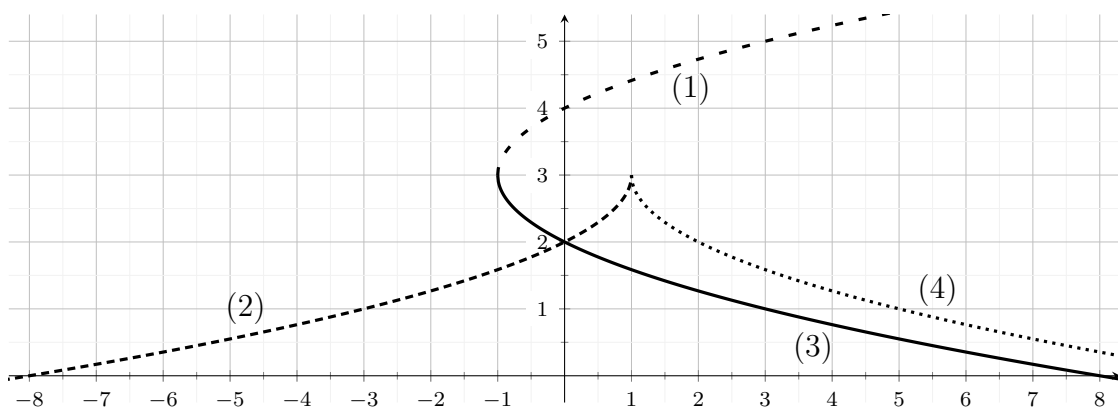
- a) Ermitteln Sie, für welche  $\lambda \in \mathbb{R}$  das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  lösbar ist. Für welche  $\lambda$  gibt es genau eine Lösung? Begründen Sie Ihre Antworten knapp.
- b) Lösen Sie das System für  $\lambda = 3$ .
- c) Ist die Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$  injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 2 (3+4+3 Punkte)

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2-1} \quad \text{und} \quad g(x) = -\sqrt{x+1} + 3.$$

- a) Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Funktion  $f$ .
- b) Ermitteln Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktion  $g$ .
- c) Entscheiden Sie, welcher der vier abgebildeten Graphen zur Funktion  $g$  gehört. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



**Aufgabe 3** (7+3 Punkte)

Gegeben sei ein Polynom  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$p(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 5x.$$

- a) Berechnen Sie alle reellen Nullstellen des Polynoms  $p$  und schreiben Sie  $p$  als Produkt von Linearfaktoren.
- b) Geben Sie ein Polynom  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad 3 an, sodass die rationale Funktion  $f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$  (mit  $p(x)$  wie oben) eine hebbare Definitionslücke bei  $x = -5$  und eine Polstelle bei  $x = 0$  hat.

**Aufgabe 4** (5+5 Punkte)

- a) Skizzieren Sie die folgende Punktmenge in der  $(x, y)$ -Ebene.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 1, \quad x^2 - 2 \leq y \leq -x + 2\}$$

- b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Ungleichung

$$|2x - 5| < 7 - 4x.$$

**Aufgabe 5** (2+4+1+3 Punkte)

Gegeben seien zwei Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \frac{2n^3 - n^2 + 3}{-5n^3 + n^2 - 3n} \quad \text{und} \quad b_n = \sqrt{5 + 4n^2} - 2n.$$

- a) Bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- b) Bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
- c) Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antworten.
  - 1) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.
  - 2) Jede konvergente Folge ist monoton.