

Klausur: Mathematische Methoden I Gruppe B

Aufgabe 1 (6+3+1 Punkte)

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

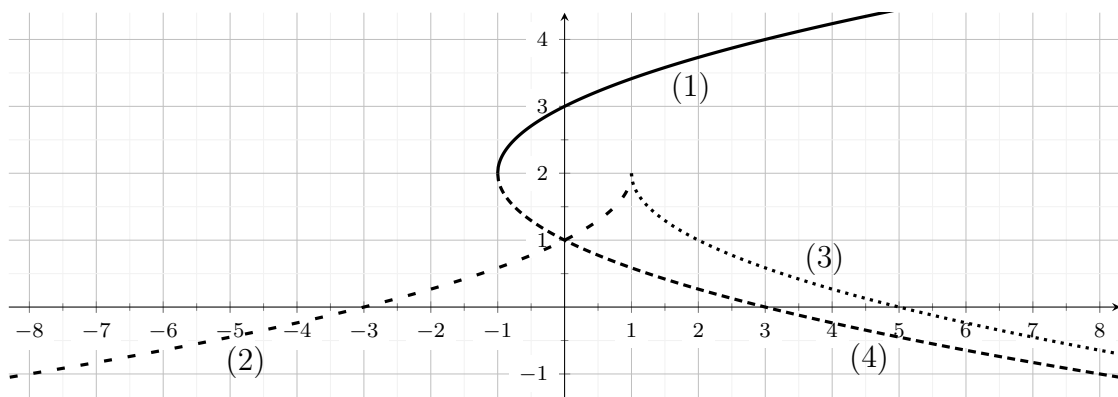
- a) Ermitteln Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar ist. Für welche λ gibt es genau eine Lösung? Begründen Sie Ihre Antworten knapp.
- b) Lösen Sie das System für $\lambda = 2$.
- c) Ist die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (3+4+3 Punkte)

Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{1-x^2} \quad \text{und} \quad g(x) = -\sqrt{x+1} + 2.$$

- a) Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Funktion f .
- b) Ermitteln Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktion g .
- c) Entscheiden Sie, welcher der vier abgebildeten Graphen zur Funktion g gehört. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Aufgabe 3 (7+3 Punkte)

Gegeben sei ein Polynom $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x.$$

- a) Berechnen Sie alle reellen Nullstellen des Polynoms p und schreiben Sie p als Produkt von Linearfaktoren.
- b) Geben Sie ein Polynom $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad 3 an, sodass die rationale Funktion $f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$ (mit $p(x)$ wie oben) eine hebbare Definitionslücke bei $x = -3$ und eine Polstelle bei $x = 0$ hat.

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)

- a) Skizzieren Sie die folgende Punktmenge in der (x, y) -Ebene.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, \quad x^2 - 4 \leq y \leq -x + 4\}$$

- b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Ungleichung

$$|2x - 7| < 8 - 3x.$$

Aufgabe 5 (2+4+1+3 Punkte)

Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{-3n^3 + 2n^2 - 1}{4n^3 + n^2 + 2n} \quad \text{und} \quad b_n = \sqrt{4 + 9n^2} - 3n.$$

- a) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- b) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- c) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antworten.
 - 1) Jede konvergente Folge ist monoton.
 - 2) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.