Mathematik I WS 2019/2020 **Übung 10**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Thomas Kahle, Dr. Michael Höding

Aufgabe 10.1 *Gegeben sei der Vektorraum* $\mathbb{R}^{2\times 2}$*, und sei*

$$M = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

i) *Ist* $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M$*?*

ii) *Bestimmen Sie die Dimension von* M*. Geben Sie Unterräume von* M *mit allen möglichen Dimensionen an.*

Aufgabe 10.2 *Zeigen Sie, dass die Menge* $E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *mit* $v_1 = (1,2,3,4)^\intercal$, $v_2 = (2,0,1,-1)^\intercal$, $v_3 = (-1,0,0,1)^\intercal$ *und* $v_4 = (0,2,3,0)^\intercal$ *ein Erzeugendensystem des* $\mathbb{R}^4$ *ist. Ist* E *linear unabhängig?*
Ergänzen Sie die Menge $\{(0,4,5,9)^\intercal, (3,3,3,1)^\intercal\}$ *durch Vektoren aus* E *zu einer Basis des* $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 10.3 *Für die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

berechne man:

i) $B + A^\intercal$, $A + B^\intercal$.

ii) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\intercal$, $\mathbf{v}^\intercal \cdot \mathbf{v}$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot B$.

Aufgabe 10.4 *Sei* V *der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten und Höchstgrad 3, d.h.,*

$$V = \left\{ a_3\, t^3 + a_2\, t^2 + a_1\, t + a_0 : a_i \in \mathbb{R},\, 0 \le i \le 3 \right\}.$$

i) *Zeigen Sie, dass* $1, t, t^2, t^3$ *eine Basis von* V *bilden.*

ii) *Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Ableitung*

$$V \to V, \quad p \mapsto p'$$

bezüglich der Monombasis aus i).

Aufgabe 10.5 *Sei* $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *gegeben durch*

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal) = (x_1 - 3x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 3x_2 - 4x_3 + 7x_4)^\intercal.$$

i) *Bestimmen Sie* $f((1, -2, 1, 3)^\intercal)$.

ii) *Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix* $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

iii) *Bestimmen Sie eine Basis von* $\mathrm{Kern} f$.

iv) *Bestimmen Sie eine Basis von* $\mathrm{Bild} f$.

v) *Bestimmen Sie alle Vektoren in* $\mathbb{R}^4$*, die auf* $(1, 1, 1)^\intercal$ *abgebildet werden.*

Votierungswoche: 07.01. - 10.01.2020