OvG-U Magdeburg
Prof. Dr. Thomas Kahle, Dr. Michael Höding

Aufgabe 11.1 *Sei* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *die lineare Abbildung*

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

für Parameter $a, b \in \mathbb{R}$.

i) *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *bestimmen Sie die Dimension von* $\operatorname{Bild}(f)$.

ii) *Für* $a = b = -1$ *bestimmen Sie* $\operatorname{Kern}(f)$ *und* $\dim \operatorname{Kern}(f)$.

iii) *Für* $a = b = -1$ *bestimmem Sie eine Basis von* $\operatorname{Bild}(f)$.
Ist $(5, 2, -2, 0)^\intercal \in \operatorname{Bild}(f)$*?*

Aufgabe 11.2 *Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) über* $\mathbb{Q}$ *mit den Parametern* $a, b \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & -4 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & az & = & -b \end{array}$$

Untersuchen Sie (z.B. unter Nutzung von Determinanten), für welche Werte von a und b das LGS genau eine, keine bzw. unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 11.3 *Berechnen Sie folgende Determinanten:*

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+\cos x & 1+\sin x & 1 \\ 1-\sin x & 1+\cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 11.4 *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie $\det A$ *für*

(a) $K = \mathbb{R}$

(b) $K = \mathbb{Z}_2$ *(wobei dann* 3 *die Restklasse von* 3 *bezeichnet usw.)*

Aufgabe 11.5 *Zeigen Sie, dass für* $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *und*

$$A = \begin{bmatrix} a & -a & a & a \\ a & a & -a & -a \\ a & -a & -a & -a \\ a & a & -a & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gilt: $\det(A) = -8a^4$*. Berechnen Sie auch* $\det(2A), \det(A^2), \det(A^{-1})$.

Votierungswoche: 13.01. - 17.01.2020