Mathematik I WS 2019/2020 **Übung 12**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Thomas Kahle, Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1

(a) *Sei* $A \in K^{n\times n}$. *Die Matrix* B *entstehe aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen. Zeigen Sie mittels der rekursiven Definition der Determinante, dass dann* $\det B = -\det A$.

(b) *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$ *eine „Blockmatrix" mit* $B \in K^{r\times r}$, $C \in K^{p\times p}$. *Zeigen Sie:* $\det A = (\det B)(\det C)$.

Aufgabe 12.2 *Finden Sie* a, b, c *mit denen die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $\chi_A(t) = -t^3 + 4t^2 + 5t + 6$ *hat.*

Aufgabe 12.3 *Untersuchen sie folgende Matrizen auf Diagonalisierbarkeit, jeweils aufgefasst als Matrix mit Einträgen in* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$*:*

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12.4 *Für die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & 2 & 2 \\ 2 & c_2 & 1 \\ 2 & 1 & c_3 \end{pmatrix}$$

sei $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ *ein Eigenvektor zum Eigenwert* $\lambda_1 = 1$.

(a) *Was folgt hieraus für die Konstanten* c_1, c_2, c_3*?*

(b) *Unter welchen Bedingungen existiert einen weiterer linear unabhängiger Eigenvektor zu* λ_1*?*

(c) *Bonusknobelaufgabe (Computereinsatz wird empfohlen!): Angenommen nur die Bedingungen in (a) gelten. Unter welchen weiteren Bedingungen an* c_1, c_2, c_3 *sind alle Eigenwerte von* A *positiv? (Man nennt* A *dann eine* positiv-definite Matrix.*)*

Aufgabe 12.5 *Untersuchen Sie alle* $15 = \binom{6}{2}$ *möglichen Paare der folgenden* 6 *reellen Matrizen auf Ähnlichkeit:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Falls Sie es beweisen, könnten Sie z.B. ausnutzen, dass Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist.

Votierungswoche: 20.01. - 24.01.2020