Mathematik I WS 2019/2020 **Übung 13**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Thomas Kahle, Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Gegeben seien die Matrizen*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \text{ und } C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

i) *Finden Sie eine Matrix P, so dass $P^T AP$ eine Diagonalmatrix ist. Tipp: Finden Sie zunächst eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

ii) *Entscheiden Sie, ob die Matrizen A, B und C positiv/negativ (semi)definit oder indefinit sind.*

iii) *Bonusaufgabe: Recherchieren Sie den* Cholesky-Algorithmus *(in der Bibliothek, im Internet, ...) und finden Sie damit eine untere Dreiecksmatrix Q mit $B = QQ^T$. Begründen Sie, warum sich A nicht so schreiben lässt.*

Aufgabe 13.2 *Die* Spur *$Sp(A)$ einer Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ ist die Summe der Diagonaleinträge: $Sp(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Zeigen Sie, dass durch $(A, B) \mapsto Sp(A^T B)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert ist.*

Aufgabe 13.3 *Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ und $|| \cdot ||$ die zugehörige Norm. Beweisen Sie:*

i) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = 2(||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2)$,

ii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *für alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 13.4 *Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 versehen mit dem Skalarprodukt $\langle p, q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)dx$ für alle $p, q \in \mathbb{R}[x]$. Dabei ist $p \mapsto \int_a^b p(x)dx$ die lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}$ für die gilt $\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$ gilt.*

Finden Sie eine Orthonormalbasis von V, indem Sie die Basis $\{1, x, x^2\}$ orthonormieren.

Aufgabe 13.5 *Eine Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt* unitär *falls $\overline{U}^T U = E_n$. Zeigen Sie, dass die unitären Matrizen eine Gruppe unter der Matrixmultiplikation bilden. Zeigen Sie auch, dass n Vektoren $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}^n$ genau dann eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts bilden, wenn die Matrix $U = (u_1|\cdots|u_n)$ (mit Spalten $u_1, \ldots, u_n$) unitär ist.*

Votierungswoche: 27.01. - 31.01.2020