

Aufgabe 2.1 Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Die Wurzel aus 7 ist irrational. (Mithilfe eines Widerspruchsbeweises.)
- (b) Ist n eine natürliche Zahl, so ist die Summe aus n und n^2 eine gerade Zahl. (Mithilfe eines direkten Beweises und mithilfe der vollständigen Induktion)

Aufgabe 2.2 Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

- (a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- (b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 10$ gilt: $n! > 2^n > n^3$.
(Hierbei ist $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ die sog. Fakultät von n .)

Aufgabe 2.3 Mit A, B, C werden die folgenden Punktmengen der x, y -Ebene bezeichnet:

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B = \{(x, y) \mid x = y \vee x = -y\},$$

$$C = \{(x, y) \mid x \leq y\}.$$

Stellen Sie folgende Mengen in der x, y -Ebene dar:

- (a) A, B, C und $A \cap B \cap C$
- (b) $(B \cup C) \setminus A$, $B \cup (A \setminus C)$ und $A \setminus (B \cup C)$.

Aufgabe 2.4 Sei

$$\begin{aligned} A &= \{x \text{ reelle Zahl} \mid 0 \leq x \leq 1 \vee x = 3\}, \\ B &= \{y \text{ reelle Zahl} \mid 1 < y \leq 3 \vee 5 \leq y < 6\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie $A \times B$ in der x, y -Ebene.

Aufgabe 2.5 Gegeben seien die Menge $A = \{(a, b); (b, a); (c, c)\}$ und die Menge $B = \{\{ \}, \{1\}\}$.

- (a) Bestimmen Sie die Potenzmenge $P(A)$ der Menge A .
- (b) Bestimmen Sie die Potenzmenge der Potenzmenge von B .