

**Aufgabe 2.1** Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Die Wurzel aus 7 ist irrational. (Mithilfe eines Widerspruchsbeweises.)
- (b) Ist  $n$  eine natürliche Zahl, so ist die Summe aus  $n$  und  $n^2$  eine gerade Zahl. (Mithilfe eines direkten Beweises und mithilfe der vollständigen Induktion)

**Aufgabe 2.2** Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

- (a) Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .
- (b) Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 10$  gilt:  $n! > 2^n > n^3$ .  
(Hierbei ist  $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  die sog. Fakultät von  $n$ .)

**Aufgabe 2.3** Mit  $A, B, C$  werden die folgenden Punktmengen der  $x, y$ -Ebene bezeichnet:

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B = \{(x, y) \mid x = y \vee x = -y\},$$

$$C = \{(x, y) \mid x \leq y\}.$$

Stellen Sie folgende Mengen in der  $x, y$ -Ebene dar:

- (a)  $A, B, C$  und  $A \cap B \cap C$
- (b)  $(B \cup C) \setminus A$ ,  $B \cup (A \setminus C)$  und  $A \setminus (B \cup C)$ .

**Aufgabe 2.4** Sei

$$\begin{aligned} A &= \{x \text{ reelle Zahl} \mid 0 \leq x \leq 1 \vee x = 3\}, \\ B &= \{y \text{ reelle Zahl} \mid 1 < y \leq 3 \vee 5 \leq y < 6\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie  $A \times B$  in der  $x, y$ -Ebene.

**Aufgabe 2.5** Gegeben seien die Menge  $A = \{(a, b); (b, a); (c, c)\}$  und die Menge  $B = \{\{ \}, \{1\}\}$ .

- (a) Bestimmen Sie die Potenzmenge  $P(A)$  der Menge  $A$ .
- (b) Bestimmen Sie die Potenzmenge der Potenzmenge von  $B$ .