

**Aufgabe 5.1** (a) Sei  $R$  eine Relation auf der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  definiert durch

$$xRy \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0.$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass  $R$  eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei  $R$  eine binäre Relation auf  $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definiert durch

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d - b \cdot c = 0.$$

Zeigen Sie, dass  $R$  eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Elemente der Äquivalenzklasse von  $(5, 3)$  an.

**Aufgabe 5.2** Untersuchen Sie, ob folgende binäre Relationen  $R$  auf der Menge  $A$  reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen bzw. Ordnungsrelationen.

Bestimmen bzw. veranschaulichen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen.

(a)  $A = \mathbb{R}^2$ ,  $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

(b)  $A = \mathbb{R} \times \{1\}$ ,  $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

(c)  $A$  sei die Potenzmenge einer Menge  $M$ ,  $M_1R M_2 \Leftrightarrow M_1 \cap M_2 = M_1$

(d)  $A$  sei die Menge aller Geraden  $g$  in der Ebene,  
 $g_1R g_2 \Leftrightarrow g_1 \cap g_2 = \emptyset \vee g_1 = g_2.$

**Aufgabe 5.3** Betrachten Sie die Halbordnung  $|$  also die Teilbarkeit auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ . Visualisieren Sie das Hasse-Diagramm dieser Halbordnung auf einem geeigneten Ausschnitt von kleinen Zahlen, z.B. 1 bis 20.

Sei  $X = \{3, 4, 5, 6, 7\} \subset \mathbb{N}$ . Bestimmen Sie alle minimalen Elemente von  $X$ . Hat  $X$  ein kleinstes Element? Hat  $X$  ein Infimum?

**Aufgabe 5.4** Sei  $T(180)$  die Menge aller Teiler von 180 und  $|$  die Teilbarkeitsrelation.

(a) Ermitteln Sie alle Elemente der Menge  $T(180)$ .

(b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von  $(T(180), |)$ .

(c) Bestimmen Sie für die Teilmengen  $T_1 = \{2, 10, 60\}$ ,  $T_2 = \{6, 12, 18\}$ ,  $T_3 = \{3, 10, 90\}$  und  $T_4 = \{2, 5, 36, 45, 90\}$  von  $T(180)$  die minimalen und maximalen Elemente sowie die kleinsten und größten Elemente.

**Aufgabe 5.5** Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Gleichungen für alle  $k, n \in \mathbb{N}_0$ :

(a)  $(n+1)\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n+1}{k}$  mit  $k \leq n$ ,

(b)  $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+k+2}{n-k}\binom{n}{k+1}$  mit  $k \leq n$ .