

Aufgabe 7.1 Bestimmen Sie in der (Restklassen) Gruppe $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{[0]_{11}\}, \odot)$ für alle Elemente die inversen Elemente.

Aufgabe 7.2 In der Menge aller Polynome $K[t]$ ist eine Division mit Rest erklärt. Recherchieren Sie diese Polynomdivision, falls sie nicht (mehr) bekannt ist. Immer wenn eine Division mit Rest definiert ist, hat man den Euklidischen Algorithmus. Bestimmen Sie $\text{ggT}(p_1, p_2)$ mit $p_1 = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 2$ und $p_2 = t^3 + t^2 + t + 1$.

Aufgabe 7.3 Sei die Menge M gegeben durch

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

in der die folgende Operation \otimes erklärt ist:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix}.$$

Untersuchen Sie $(M; \otimes)$ auf Gruppeneigenschaften.

Aufgabe 7.4 Gegeben seien die Menge $H = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ zusammen mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot aus \mathbb{Q} . Zeigen Sie, dass $(H, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 7.5 Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$ und $z_3 = 4 + 3i$. Berechnen Sie

(a) $\overline{z_1 + z_2}$, (b) $\overline{z_3} - z_1$ (c) $z_1 \cdot z_2$, (d) $\frac{z_2}{z_3}$, (e) $\left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \right|$, (f) $|z_1^8|$.