2.6 Der kontinuierliche Fall

Im Fall eines Wahrscheinlichkeitsraumes mit einer überabzählbaren Ereignismenge Ω kann man, wie bereits erwähnt, nicht mehr sinnvoll jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnen. Deshalb muss man bei der Definition einer Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ darauf achten, dass zumindest den Ereignissen

$$\{\omega \,:\, X(\omega) \leq x\}.$$

Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können. Wir wollen diese Annahme ab jetzt stillschweigend machen. Dann können wir wie im diskreten Fall eine Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren:

$$F(x) := P(X \leq x).$$

Die Definitionen 2.9 und 2.7 übertragen sich, ebenso wie Satz 2.5 und Proposition 2.3.

Es sei noch bemerkt: Wenn der Wahrscheinlichkeitsraum Ω unendlich viele Elemente, die Zufallsvariable X aber nur endlich viele Realisierungen hat, sprechen wir immer noch von einer **diskreten** Zufallsvariable.

Wir können im kontinuierlichen Fall in der Regel den einelementigen Ereignissen keine positive Wahrscheinlichkeit zuordnen, ebenso kann man den Ereignissen $\{\omega \,:\, X(\omega) = x\}$ nicht immer eine positive W.K. zuordnen. Das Analogon zu den Wahrscheinlichkeiten p_x ist hier die Dichtefunktion:

Definition 2.32. Wenn es für eine Verteilungsfunktion F eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

so heißt f die zu F gehörende **Dichtefunktion**. Wir nennen X dann eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und Dichte f.

Proposition 2.33. *Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f und Verteilungsfunktion F. Dann gilt $F'(x) = f(x)$ und*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t.$$

Insbesondere gilt $P(X = x) = 0$.

Auch die Begriffe Varianz und Erwartungswert lassen sich auf kontinuierliche Zufallsvariable übertragen:

Definition 2.34. Sei X eine stetige Z.V. mit Verteilungsfunktion F und Dichte f. Dann heißt

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

der Erwartungswert von X, sofern dieses Integral existiert. Entsprechend wird die Varianz $V(X)$ definiert:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Sätze über Erwartungswerte und Varianz in Kapitel 2.3 übertragen sich auf den stetigen Fall, insbesondere gilt auch Satz 2.16.

Wir können die Varianz auch wie folgt berechnen:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x - [E(X)]^2.$$

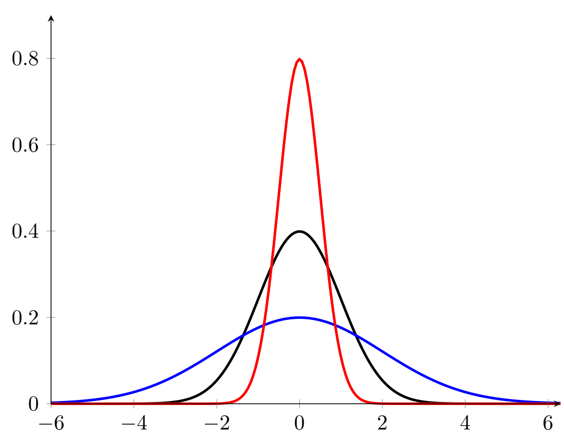
Definition 2.35 (Normalverteilung)**.** Die vermutlich bekannteste und wichtigste Verteilungsfunktion ist die **Normalverteilung** mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

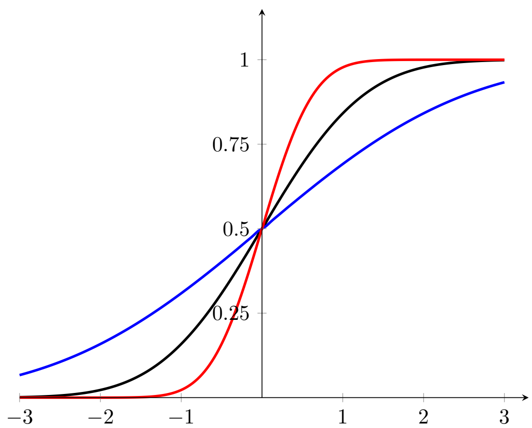
Wir nennen eine Z.V. normalverteilt wenn es μ und $\sigma > 0$ so gibt, dass die Verteilungsfunktion der Z.V. diese Dichte hat, geschrieben $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Gilt $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ nennen wir die Zufallsvariable standardnormalverteilt. Die zugehörige Verteilungsfunktion wird oft mit Φ bezeichnet.

Bemerkung 2.36. Die Funktion Φ ist als (im wesentlichen) das Integral der Funktion e^{-x^2} nicht durch "einfache" Funktionen darstellbar.

Beispiel 2.37. Zunächst ist hier ein Bild dreier Normalverteilungen, nämlich einmal der Verteilung $N(0,1)$ (schwarz), dann $N(0,2)$ (blau) sowie $N(0,\frac{1}{2})$ (rot):



Hier sind die zugehörigen Verteilungsfunktionen:



Beispiel 2.38. Erwartungswert einer $N(\mu, \sigma^2)$ verteilten Z.V. ist μ, die Varianz ist σ^2. In dem Fall ist die Zufallsvariable $(X - \mu)/\sigma$ standardnormalverteilt. Die Verteilungsfunktion einer $N(\mu, \sigma^2)$ verteilten Z.V. ist

$$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

und die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

wobei

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

die Dichte der Standardnormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ist.

Proposition 2.39. *Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt*

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}).$$

2.7 Weitere Eigenschaften der Normalverteilung

Satz 2.40. *Es seien X_1 und X_2 zwei unabhängig normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswerten μ_1 und μ_2 sowie Varianzen σ_1^2 und σ_2^2. Dann ist auch $X_1 + X_2$ normalverteilt mit Erwartungswert $\mu_1 + \mu_2$ und Varianz $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.*

Man nennt diese Eigenschaft auch die Faltungseigenschaft der Normalverteilung: Haben ganz allgemein zwei unabhängige Z.V. die Dichten f und g, so hat $X_1 + X_2$ die Dichte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

und das hier auftretende Integral heißt die Faltung von f und g.

Beim schwachen Gesetz der großen Zahlen (Satz 2.30) haben wir gesehen, dass man Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen berechnen kann. Im Fall normalverteilter Z.V. kennt man sogar die Verteilung. Der Beweis ist im Gegensatz zu den meisten bisher formulierten Sätze nicht trivial:

Satz 2.41 (Zentraler Grenzwertsatz)**.** *Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P). Dann gilt für die Folge der Zufallsvariablen $\tilde{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$:*

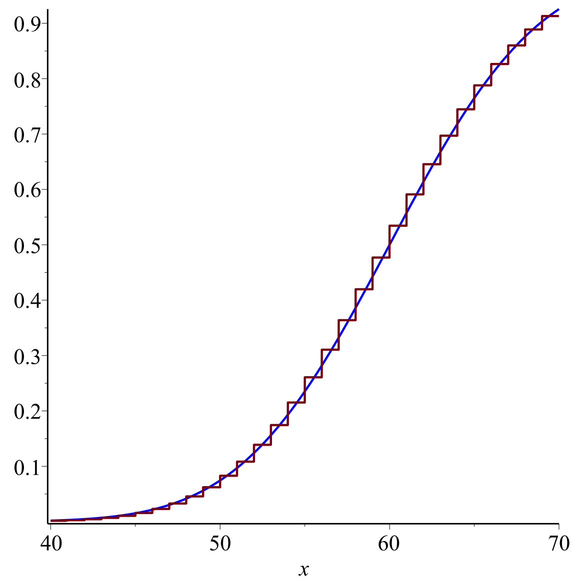
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\tilde{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z).$$

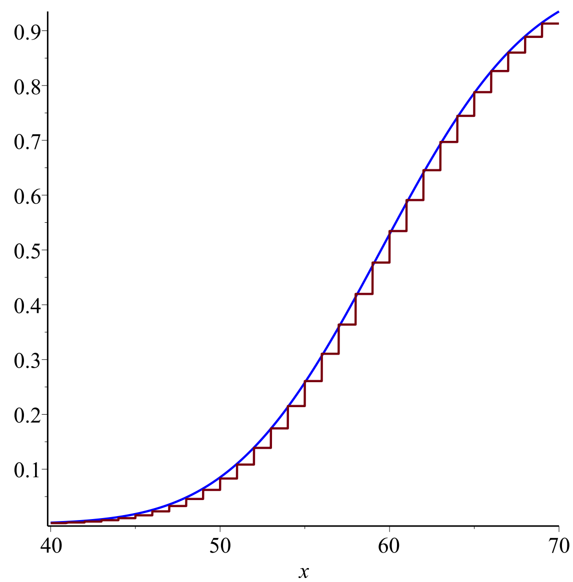
Mit anderen Worten: Das arithmetische Mittel ist asymptotisch $N(\mu, \sigma^2/n)$-verteilt.

Sei $F_{B(n,p)}$ die Verteilungsfunktion einer $B(n,p)$ verteilten Zufallsvariable X. Dann gilt

$$F_{B(n,p)}(x) \approx \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

falls np **und** $n(1-p)$ beide groß sind (Faustregel: $np(1-p) \geq 9$). Man nennt die Addition von $+1/2$ die Stetigkeitskorrektur. Das wird deutlich, wenn man sich ein Beispiel anschaut, z.B. die Verteilung von $B(300, 0.2)$ und die entsprechende Normalverteilung ohne und mit Stetigkeitskorrektur. Im ersten Bild ohne, im zweiten Bild mit Stetigkeitskorrektur:





Man nennt diese Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung auch den zentralen Grenzwertsatz von deMoivre-Laplace. Beachten Sie, dass bei der Berechnung der W.K. $P(k \leq S_n \leq l)$ die "Stetigkeitskorrektur" an der unteren Schranke mit einem anderen Vorzeichen erfolgt:

Proposition 2.42. *Sei $X \sim B(n,p)$ mit $np(1-p) \geq 9$. Dann gilt*

$$P(k \leq X \leq l) \approx \Phi\left(\frac{l+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Da die Poissonverteilung als Grenzverteilung der Binomialverteilung auftritt ist es auch nicht überraschend, dass die Poissonverteilung $F_{P(\lambda)}$ zum Parameter λ durch die Normalverteilung approximiert werden kann:

$$F_{P(\lambda)}(x) \approx \Phi\left(\frac{x+1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

2.8 Gleichverteilung und Exponentialverteilung

Eine Zufallsvariable X mit Realisierungen auf einem Intervall $[a,b]$ heißt gleichverteilt, falls für die Wahrscheinlichkeiten gilt

$$P(X \in [c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

für $a \leq c \leq d \leq b$. Die Dichtefunktion $f(x)$ ist dann

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man kann dann daraus leicht Erwartungswert und Varianz einer auf $[a,b]$ gleichverteilten Zufallsvariablen X bestimmen:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{b+a}{2} \\ V(X) &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Definition 2.43. Eine Zufallsvariable X heißt exponentialverteilt zum Parameter λ (geschrieben $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$), wenn die Dichte $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ für $x > 0$ und 0 sonst ist.

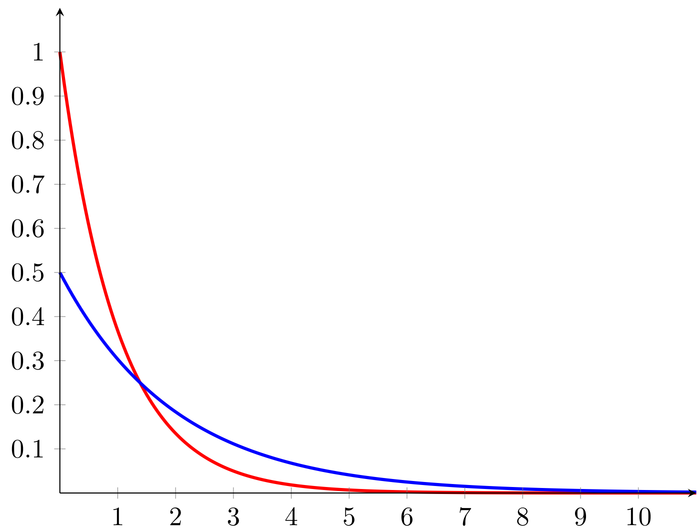
Satz 2.44. *Die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Exponentialverteilung ist $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und 0 für $x < 0$. Der Erwartungswert ist $1/\lambda$ und die Varianz $1/\lambda^2$.*

Bemerkung 2.45. Die Exponentialverteilung ist *gedächtnislos* im folgenden Sinne:

$$P(X \geq t+h | X \geq t) = P(X \geq h)$$

für alle $t, h > 0$.

Hier sind die Bilder der Dichten von zwei Exponentialverteilungen, einmal zum Parameter $\lambda = 1$ (rot) und einmal zum Parameter $\lambda = 1/2$ (blau).



2.9 Gammaverteilung

Zunächst verallgemeinern wir den Begriff der Fakultät:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x, \quad z > 0.$$

Es gilt $\Gamma(k) = (k-1)!$ für $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Definition 2.46. Eine Zufallsvariable X heißt gammaverteilt ($\sim \Gamma(\alpha, \lambda)$) mit Parametern $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$, wenn ihre Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad \text{für } x > 0$$

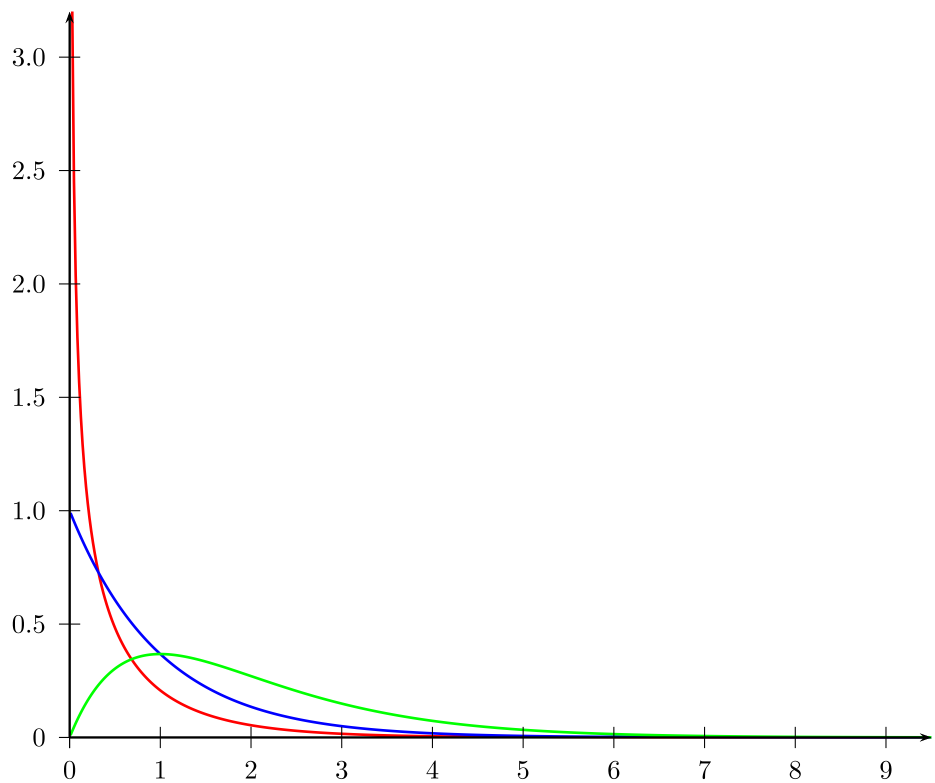
ist (und 0 für $x \leq 0$).

Der Parameter λ ist nur ein "Formparameter", denn wenn $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$, dann gilt $\frac{1}{\lambda} X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Der Parameter α hingegen hat wesentlichen Einfluß auf die Dichtefunktion. Im Fall $\alpha = 1$ erhalten wir die Exponentialverteilung.

Satz 2.47. *Sei $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, dann*

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\alpha}{\lambda} \\ V(X) &= \frac{\alpha}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Das folgende Bild zeigt die Dichte der Gammaverteilung jeweils für $\lambda = 1$ und $\alpha = 0.5$ (rot), $\alpha = 1$ (blau) und $\alpha = 2$ (grün):


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

3 Statistik

3.1 Einführung

In der Statistik geht es darum, Daten auszuwerten und ggf. Annahmen über gewisse Hypothesen zu testen. Man unterscheidet

- Deskriptive Statistik: Es geht darum, Daten sinnvoll aufzubereiten und darzustellen.
- Explorative Statistik: Suche rein empirisch nach Zusammenhängen in den Datensätzen.
- Induktive Statistik: Man versucht, aus den Daten Schlussfolgerungen zu ziehen.

Die Idee, die wir hier verfolgen, ist die folgende: Wir haben eine unendlich große (oder aber zumindest sehr große) Grundgesamtheit, aus der wir zufällig eine Stichprobe ziehen. Stichprobe bedeutet hier, sich eine gewisse Anzahl n Elemente anzuschauen. Dann wird jedem Element ein Merkmal zugeordnet. Das müssen nicht unbedingt Zahlen sein (vgl. hier unsere Diskussion über den Ereignisraum Ω eines Zufallsexperimentes).

Merkmale werden in folgende Typen eingeteilt:

- nominalskaliert: Merkmale sind Namen. Mathematische Operationen sind mit solchen Namen (z.B. Farben) nicht möglich.
- ordinalskaliert: Namen, die man sinnvoll ordnen kann (z.B. Dienstgrade).
- intervallskaliert: Zahlen mit einem "willkürlich" gewählten Ursprung (z.B. Temperatur)
- verhältnisskaliert: Zahlen mit einem sinnvollen Ursprung-

Die Frage, wie wir Daten sinnvoll aufbereiten (Stabdiagramme, Tortendiagramme etc.) wollen wir hier nicht diskutieren.

3.2 Stichproben

Definition 3.1. Angenommen wir ziehen eine Stichprobe vom Umfang n. Die Merkmale, die wir den Elementen der Stichprobe zuordnen können, seien $a_1, \dots a_k$. Die Zahlen

$$h_i := \text{ Anzahl Einheiten in der Stichprobe, die das Merkmal } a_i \text{ haben}$$

heißen die **Häufigkeiten** der Stichprobe, die Quotienten h_i/n die **relativen Häufigkeiten**. Wenn die Merkmale Zahlen sind, so heißt

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} h_i a_i$$

der empirische Mittelwert der Stichprobe. Wenn das Merkmal der i-ten Einheit in der Stichprobe x_i ist $(i = 1, \ldots, n)$, so gilt

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Die empirische Varianz wird definiert als

$$\bar{s_x}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Bemerkung 3.2. Empirische Mittelwerte von ordinalskalierten Größen (wie z.B. Schulnoten) kann man nicht sinnvoll bilden, in dem Fall nimmt man den empirischen Median. Empirische Mittelwerte sind erst bei intervallskalierten Größen sinnvoll.

Wir können jetzt auch eine empirische Verteilungsfunktion definieren, nämlich

Definition 3.3. Seien $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ die Merkmale einer Stichprobe vom Umfang n. Die **empirische Verteilungsfunktion** ist

$$\widetilde{F_n(x)} = \frac{1}{n}|\{i \,:\, x_i \leq x\}|.$$

Abschließend das empirische p-Quantil, das auch bei nominalskalierten Größen sinnvoll ist.

Definition 3.4. Seien $x_1, \ldots, x_n$ aufsteigend geordnete Stichprobenwerte und sei $0 \leq p \leq 1$.) Dann definieren wir

$$\hat{x}_p = \begin{cases} x_{\lfloor np \rfloor + 1} & \text{falls } np \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{np} + x_{np+1}) & \text{falls } np \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

3.3 Empirische Korrelation

Definition 3.5. Gegeben seien Wertepaare $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ mit den entsprechenden Mittelwerten $\bar{x}$ und $\bar{y}$ und den empirischen Varianzen $\bar{s}_x^2$ sowie $\bar{s}_y^2$. Als empirische Kovarianz definieren wir

$$s_{x,y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Wenn $\bar{s}_x, \bar{s}_y \neq 0$, definieren wir den **Pearson'schen Korrelationskoeffizienten**

$$r_{x,y} = \frac{s_{x,y}}{\bar{s}_x \cdot \bar{s}_y}.$$

(auch hier: Nur sinnvoll bei intervallskalierten Größen).

Es gilt

Proposition 3.6. *$|r_{x,y}| \leq 1$ mit Gleichheit genau dann wenn die Punkte (x_i, y_i) alle auf einer Geraden liegen. Ferner minimiert die Gerade $y = ax + b$ mit $a = r_{x,y} \cdot \frac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x}$ und $b = \bar{y} - a\bar{x}$ den quadratischen Fehler $\sum(y_i - f(x_i))^2$ unter allen möglichen Geradengleichungen $f(x) = ax + b$.*

3.4 Stichproben als Zufallsexperiment

In vielen Fällen stellt sich die Situation folgendermaßen dar: Weil unsere Grundgesamtheit Ω sehr groß ist, können wir davon ausgehen, dass das Ziehen einer einelementigen Stichprobe ein Zufallsexperiment auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) ist, und dass die Zuordnung, die einer Einheit der Stichprobe ein Merkmal zuordnet (sofern die Merkmale Zahlen sind), eine Zufallsvariable X auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum ist. Wir führen dann dieses Zufallsexperiment n-mal unabhängig voneinander nacheinander durch. Dann ist der Ereignisraum Ω^n, wobei $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ das Ereignis ist, dass deim Ziehen der i-ten Stichprobe das Elementarereignis ω_i eintritt, $i = 1, \ldots, n$. Die Zufallsvariable X_i sei das Merkmal des Ausgangs des i-ten Zufallsexperimentes. Offenbar sind alle X_i genauso verteilt wie X, also sind die X_i i.i.d. auf Ω. Der Ereignisraum Ω^n wird zu einem Wahrscheinlichkeitsraum durch die Produktverteilung: Sind $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$, denen wir W.K. $P(A_i)$ zuordnen können, dann ist

$$P(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \,:\, \omega_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Wir können dann auf Ω^n verschiedene Zufallsvariablen definieren, genauso wie wir den Stichproben gewisse Merkmale wie Mittelwert und Varianz zugeordnet haben. Ein entscheidender neuer Blickwinkel ist aber der, dass die Abbildung, die einer Stichprobe (also einem Ereignis in Ω^n) eine Zahl, z.B. den Mittelwert, zuordnet, eine Zufallsvariable ist. Eine solche Z.V. wird oft auch Stichprobenfunktion oder auch Schätzfunktion genannt. Wir schreiben im folgenden oft x_i statt $X_i(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ Die Verteilung der Stichprobenfunktion T ergibt sich in vielen Fällen aus der Verteilung von X.

Definition 3.7. Ein Zufallsexperiment auf dem W.R. (Ω, P) werde n-mal wiederholt. Dann definieren wir die folgenden Stichprobenfunktionen auf Ω^n:

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
\overline{S_X}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \\
\overline{F(x)} &= \frac{1}{n}|\{i : x_i \leq x\}|.
\end{aligned}$$

Es stellt sich natürlich die Frage, ob diese Schätzfunktionen irgendetwas mit der Verteilung der Z.V. X zu tun haben. Intuitiv denkt man, dass hier Erwartungswert, Varianz und Verteilungsfunktion von X geschätzt werden.

Definition 3.8. Gilt für eine Folge T_n von Stichprobenfunktionen vom Umfang n für alle n

$$E(T_n) = \Theta,$$

so nennen wir T_n einen **erwartungstreuen Schätzer** für Θ. Die Folge heißt **konsistenter Schätzer** für Θ wenn

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \Theta| < \epsilon) = 1$$

für jedes $\epsilon > 0$ gilt Wir nennen die Folge T_n **konsistenten Schätzer** für Θ im **quadratischen Mittel** wenn

$$\lim_{n\to\infty} E((T - \Theta)^2) = 0.$$

Bemerkung 3.9. (1.) Konsistenz im quadratischen Mittel impliziert Konsistenz, aber nicht umgekehrt. Zwischen Erwartungstreue und Konsistenz besteht kein Zusammenhang.

(2.) Wenn die Abhängigkeit der Folge T_n von n aus dem Zusammenhang klar ist (z.B. für den empirischen Mittelwert), lässt man das n manchmal weg.

Satz 3.10.

1. *Die Stichprobenfunktion $\bar{X}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für $E(X)$. Er ist ebenfalls konsistent im quadratischen Mittel und damit konsistent.*

2. *Die Stichprobenfunktion $\overline{F(x)}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für $F(x)$, wobei F die Verteilungsfunktion von X ist. Dieser Schätzer ist konsistent im quadratischen Mittel, also auch konsistent.*

3. *Die Stichprobenfunktion $\bar{S_X}^2$ ist erwartungstreu und konsistent für die Varianz von X. Würden wir nicht durch $n-1$, sondern durch n dividieren, wäre dieser Schätzer nicht erwartungstreu, aber immer noch konsistent.*

Bemerkung 3.11. Ist $X \sim B(1,p)$ binomialverteilt, dann ist

$$\frac{1}{n}|\{i \,:\, x_i = 1\}|$$

erwartungstreu und konsistent im quadratischen Mittel für p, weil hier ja gerade der Erwartungswert von X "geschätzt" wird.

Wir kennen also nun Schätzer für einige wichtige Parameter einer Verteilungsfunktion. Um aber etwas über die Qualität dieser Schätzer aussagen zu können (Konfidenzintervalle, Test von Hypothesen), müssen wir noch einiges über die Verteilungsfunktionen dieser Zufallsvariablen erfahren.

3.5 Normalverteilung

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für die Stichprobenfunktion $\bar{X}$ beim Ziehen einer Stichprobe vom Umfang n:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

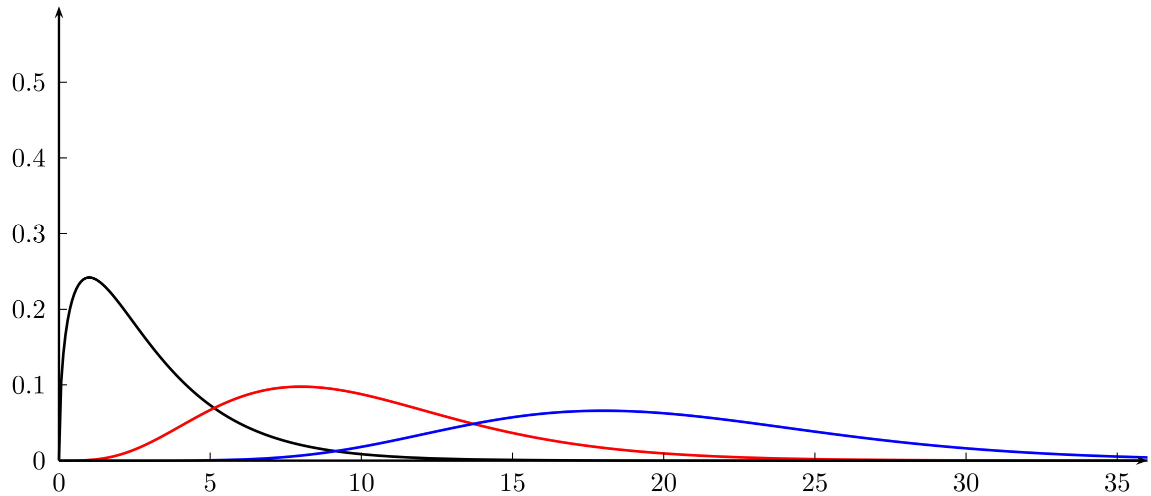
Wir kennen also die Verteilung des empirischen Mittelwertes. Für die Verteilung der empirischen Varianz gilt

$$\frac{n-1}{\sigma^2}\overline{S_X}^2 \sim \chi^2(n-1),$$

wobei die hier auftretende χ^2-Verteilung ein Spezialfall der Gamma-Verteilung ist, und zwar gilt.

Definition 3.12. Die $\chi^2(m)$-Verteilung mit m Freiheitsgraden ist die Gammaverteilung $\Gamma(\frac{m}{2}, \frac{1}{2})$.

Das folgende Bild zeigt die χ^2-Verteilungen für die Freiheitsgrade 3 (schwarz), 10 (rot) sowie 30 (blau):



Bemerkung 3.13. Es gilt für eine Zufallsvariable $X \sim \chi^2(m)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= m \\ V(X) &= 2m. \end{aligned}$$

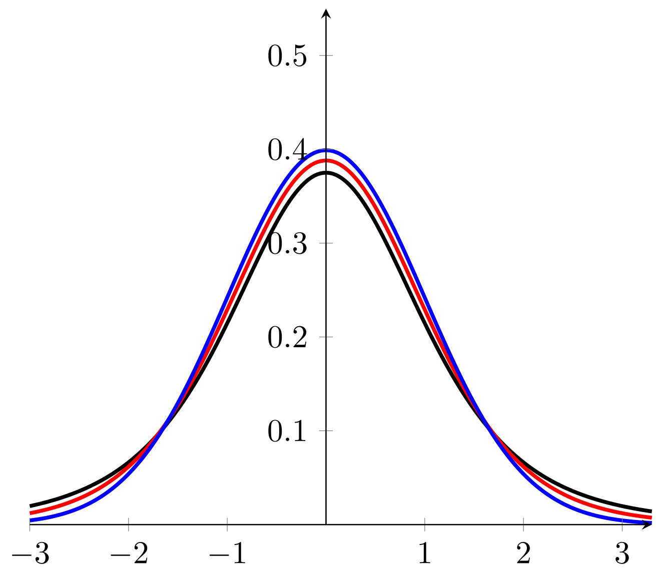
Satz 3.14. *Sei $X \sim \chi^2(m)$ und $Z \sim N(0,1)$. Dann heißt die Verteilung von*

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/m}}$$

eine t-Verteilung (Student-t-Verteilung) mit m Freiheitsgraden, geschrieben $t(m)$. Es gilt für den Erwartungswert und die Varianz:

$$\begin{aligned} E(T) &= 0 \quad (m > 1) \\ V(T) &= m/(m-2) \quad (m > 2). \end{aligned}$$

Das folgende Bild zeigt die t-Verteilung für $m = 4$ (schwarz) und $m = 9$ (rot) sowie die Normalverteilung $N(0,1)$ (blau). Man “sieht”, dass sich die t-Verteilung der Normalverteilung annähert.



Bemerkung 3.15. Sowohl Varianz für $m \leq 2$ als auch Erwartungswert für $m = 1$ existieren nicht!

Bemerkung 3.16. Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt (n-fache Stichprobe)

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\bar{S}/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

3.6 Binomialverteilung

Sei $X \sim B(1, p)$. Dann ist $\bar{X}$ asymptotisch normalverteilt zum Erwartungswert p und der Varianz $p(1-p)/n$. Wir können dies bei statistischen Tests benutzen. Wir gehen hier nicht genauer auf den Bergriff "asymptotisch normalverteilt" ein.

3.7 F-Verteilung

Sind $X_1 \sim \chi^2(m_1)$ und $X_2 \sim \chi^2(m_2)$ zwei Zufallsvariablen, die jeweils einer χ^2-Verteilung genügen (z.B. die empirische Varianz), so ist die Verteilung der Zufallsvariable

$$X = \frac{X_1/m_1}{X_2/m_2}$$

ein $F(m_1, m_2)$-Verteilung mit Parametern m_1 und m_2. Es gilt

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{m_2}{m_2 - 2}, \quad m_2 > 2 \\ V(X) &= \frac{2m_2^2(m_1 + m_2 - 2)}{m_1(m_2 - 2)^2(m_2 - 4)}. \end{aligned}$$

Die Dichte ist recht kompliziert, deshalb wird auf sie an dieser Stelle verzichtet. Beachten Sie, dass die F-Verteilung Aussagen darüber macht, wie der Quotient von zwei empirischen Varianzen verteilt ist.