6 Differenzialgleichungen

6.1 Definition, Existenz, Richtungsfelder

Definition 6.1. Eine Gleichung

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

nennt man eine **gewöhnliche Differenzialgleichung** (DGL) n'ter Ordnung. Dabei ist $y(x)$ eine reelle Funktion $D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Wenn man F nach $y^{(n)}(x)$ auflösen kann, also

$$y^{(n)}(x) = G(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)),$$

so spricht man von einer DGL in **expliziter Form**. Wenn in G keine explizite Abhängigkeit von x vorliegt, spricht man von einer **autonomen DGL**.

Beispiel 6.2. Ein ganz einfaches Beispiel ist $y'(x) = x$ mit der Lösung $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$. Das c kann evtl. bestimmt werden durch Angabe eines Anfangswertes $y(x_0) = y_0$. Andere Beispiele wären $y'(x) = 2x \cdot y(x)$ (mit Lösungen $y(x) = c \cdot e^{x^2}$). Eine Differentialgleichung 2.ter Ordnung wäre etwa $y''(x) = -y(x)$ (mit der Lösung $\sin(x)$, aber auch $\cos(x)$).

In der Praxis sind meistens nur DGL's bis zur zweiten Ordnung interessant sowie partielle Differentialgleichungen, bei denen partielle Ableitungen auftreten. Wir werden hier nur wenige Verfahren vorstellen, wie man eine DGL analytisch lösen kann, und zwar aus einem einfachen Grund: Nur die wenigsten in der Praxis auftretenden Fälle lassen sich analytisch lösen, man ist eigentlich stets auf numerische approximative Verfahren angewiesen! Eine Aufgabe der Mathematik in diesem Zusammenhang ist es, Kriterien anzugeben, wann eine DGL lösbar ist und ob diese Lösung eindeutig ist. Dazu benutzt man oft den Begriff des Gebietes: Ein Gebiet D ist eine offene zusammenhängende Menge: Offen heißt: Von jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ können Sie in jede Richtung ein klein wenig gehen, ohne D zu verlassen, d.h. es gibt ein $\epsilon > 0$ so, dass $\{\mathbf{y} : ||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| < \epsilon\} \subset D$. Zusammenhängend bedeutet hier (lax), dass es zu je zwei Punkten $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ einen "Weg" von $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{y}$ gibt.

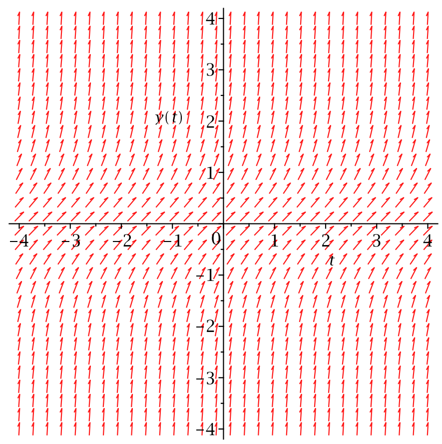
Satz 6.3 (Existenzsatz von Peano, Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)**.** *Sei G eine auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1})$ in D eine Umgebung $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ und eine dort definierte Funktion $y(x)$ mit $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ mit $y^{(n)}(x) = G(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$. Existieren darüber hinaus alle partiellen Ableitungen von G in allen Punkten D und sind diese stetig, dann ist die Lösung sogar eindeutig.*

Wir betrachten nun den Fall $n = 1$:

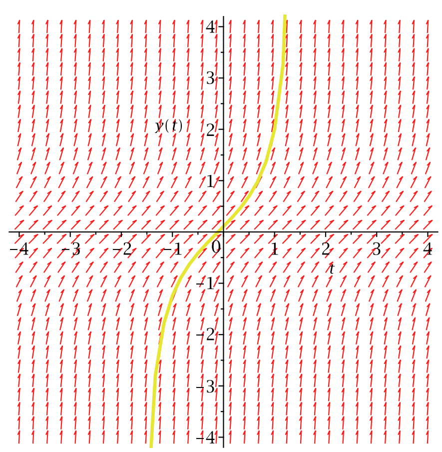
Beispiel 6.4. Sei $y' = 1 + y^2$, also $G(x, y) = 1 + y^2$ und $D = \mathbb{R}^2$. Lösungen sind $y_c(x) = \tan(x - c)$, $x \in (c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2})$, für $c \in \mathbb{R}$. Also: Obwohl G auf ganz $\mathbb{R}^2$

definiert ist, erhalten wir keine Lösungskurve für ganz $\mathbb{R}$. Im Allgemeinen hat jede DGL $y' = G(x, y)$ viele Lösungen $y = y(x)$, einfach weil ja zu allen Anfangswerten eine Lösung existieren muss!

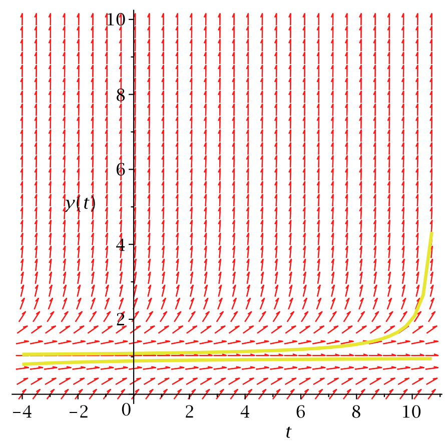
Man kann eine DGL erster Ordnung schön visualisieren, indem man ein Richtungsfeld angibt. Hier wäre das Richtungsfeld für die DGL $y' = y^2 + 1$:



Hier ist eine Lösung mit $y(1) = 2$:



Das folgende Bild zeigt, dass die Lösungen einer DGL sehr sensitiv sein können gegen kleine Änderungen in den Ausgangsparametern: Das folgende Bild etwa zeigt Lösungen der DGL $y'(x) = (1 - y(x))^2$ für den Anfangswert $y(0) = 1.1$ (diese Funktion hat an der Stelle $a = 11$ eine vertikale Asymptote) und den Anfangswert $y(0) = 0.9$ (diese Funktion ist für alle $x > 0$ definiert):



Die letzten beiden Beispiele waren von der Form $y' = ay^2 + by + c$ Die Lösungen dieser DGLs fassen wir im folgenden Satz zusammen:

Satz 6.5. *Sei $y' = a(y - A)$. Die allgemeine Lösung dieser DGL ist*

$$y(x) = A + Ke^{ax}.$$

Die allgemeine Lösung von $y' = a(y - A)(y - B)$ mit $A \neq B$ ist

$$y(x) = A - \frac{A - B}{1 + Ke^{a(B-A)x}}.$$

Gilt $y(x_0) = A$ (oder B) für einen Anfangswert x_0, so ist die Lösung $y(x) = A$ (oder $y(x) = B$) für alle x.
Die allgemeine Lösung von $y' = a(y - A)^2$ ist

$$y(x) = A - \frac{1}{ax - K}.$$

Auch hier ist die Lösung $y(x) = A$ für alle x, falls $y(x_0) = A$ gilt.
In allen Fällen kann K aus der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ bestimmt werden. Der Definitionsbereich der Lösungen ist jeweils das größte Intervall, das x_0 enthält und auf dem $y(x)$ definiert ist.

Beispiel 6.6. Das folgende Beispiel soll zeigen, dass man keine eindeutige Lösung erhalten muss, wenn G nicht differenzierbar ist. Wir betrachten

$$y' = \sqrt{|y|}.$$

Hier erhalten wir beispielsweise durch den Punkt $(2,1)$ für jedes $a \leq 0$ eine Lösung

$$y(x) = \begin{cases} x^2/4 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad a \leq x \leq 0 \\ -(x-a)^2/4 & \text{für} \quad x < a \end{cases} .$$

"Lokal" gibt es um den Punkt $(2,1)$ allerdings nur eine Lösung. Wenn wir aber als Anfangsbedingung $y(0) = 0$ fordern, dann gibt es in jedem noch so kleinen Intervall um $(0,0)$ unendlich viele Lösungen. Die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf sind nicht erfüllt, weil $\sqrt{|y|}$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist.

6.2 Trennung der Variablen

In diesem Fall hat G die Form

$$G(x,y) \;=\; u(x)\,v(y), \quad x \in I, \quad y \in J,$$

mit Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktionen u und v seien stetig. Die DGL ist also

$$y'(x) \;=\; u(x)\,v\big(y(x)\big).$$

Wir betrachten die Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$, wobei $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$.
Wenn $v(y_0) \neq 0$ und y_0 ein innerer Punkt von J ist (d.h. es gibt $\epsilon > 0$ mit $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \subset J$), dann kann man zeigen, dass die DGL in einer Umgebung von x_0 eindeutig lösbar ist. Die Lösung $y(x)$, $x \in I_0$ (Teilintervall von I, das x_0 enthält), erhält man wie folgt:

(i) Überprüfe $v(y_0) \neq 0$ und bestimme das größte Teilintervall $J_0 \subseteq J$ mit $y_0 \in J_0$ und $v(y) \neq 0$ in J_0 .

(ii) Bestimme $U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x,\;\; x \in I$ und $V(y) \;=\; \int \frac{1}{v(y)}\,\mathrm{d}y,\;\; y \in J_0$.

(iii) Für $x \in I$ betrachte (mit $y \in J_0$)

$$V(y) \;=\; U(x) - c_0,\;\; y \in J_0,$$

wobei $c_0 = U(x_0) - V(y_0)$. Das definiert ein Teilintervall $I_0 \subseteq I$ und eine Lösungsfunktion $y(x)$ auf I_0: $I_0 \;=\; \big\{x \in I \;:\; \text{die Gleichung } V(y) = U(x) - c_0 \text{ hat eine Lösung mit } y \in J_0\big\}$.

Beispiel 6.7. Wir betrachten $y' \;=\; 1 + y^2$, $y(x_0) = y_0$ für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Hier ist $u(x) = 1$, $x \in I = \mathbb{R}$ und $v(y) = 1 + y^2$, $y \in J = \mathbb{R}$:

(i) $v(y_0) > 0$ und $J_0 = \mathbb{R}$.

(ii) $U(x) = \int 1 \mathrm{d}x \;= x$, $\quad V(y) = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \;=\; \arctan(y)$.

(iii) Die Gleichung $V\big(y\big) \;=\; U(x) - c_0$ mit $c_0 = U(x_0) - V(y_0)$ liefert

$$\arctan(y) \;=\; x - c_0, \quad \text{mit } c_0 = x_0 - \arctan(y_0).$$

Wir erhalten $I_0 = \;\big]-\frac{\pi}{2} + c_0,\, \frac{\pi}{2} + c_0\big[$ und somit $y(x) \;=\; \tan(x - c_0)$ mit $x \in I_0$.

6.3 Numerisches Verfahren: Die Euler Methode

Wie bereits erwähnt gibt es nur wenige DGLs, die man analytisch lösen kann. Numerische Verfahren sind nötig.
Wähle eine Schrittgröße h und eine Anzahl Schritte K. Beginne mit (x_0, y_0)und generiere Punkte (x_k, y_k), $k = 1, 2, \ldots, K$, wie folgt:

$$x_k = x_{k-1} + h, \quad y_k = y_{k-1} + h \cdot G\big(x_{k-1}, y_{k-1}\big).$$

Die Punkte (x_k, y_k), $(k = 0, 1, \ldots, K)$ gehören dann zum Graphen einer approximativen Lösung von $y(x)$. Diese Methode basiert auf der Approximation

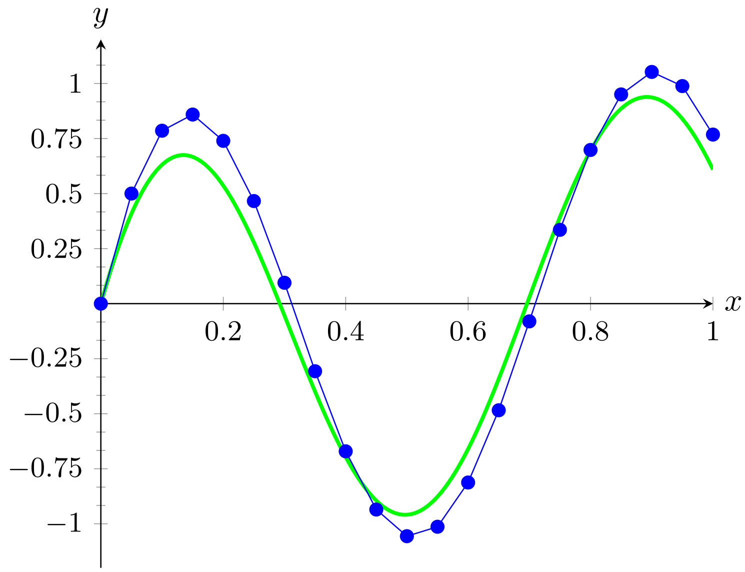
$$y(x) \;\approx\; y(x_{k-1}) \;+\; y'(x_{k-1})\,(x - x_{k-1}),$$

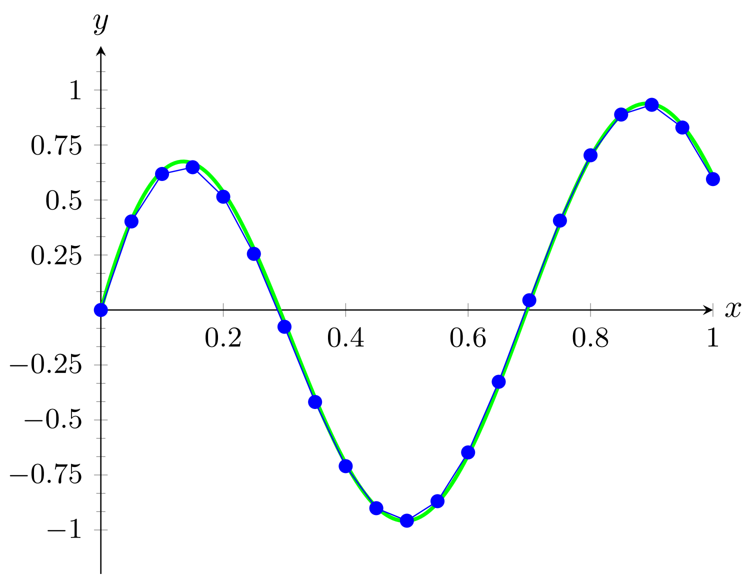
wobei hier $x = x_{k-1} + h$ und $y'(x_{k-1}) = G\big(x_{k-1}, y(x_{k-1})\big)$. Wir nennen dieses Verfahren auch die Eulermethode.
Diese Graphen zeigen die approximativen Lösungen von $y' \;=\; -7y \;+\; 10\cos(8x)$ with $y(0) = 0$. Wir werden später sehen, dass die exakte Lösung

$$y(x) \;=\; \frac{10}{\sqrt{113}}\cos(8x - \beta) \;-\; \frac{70}{113}\,e^{-7x}, \quad \beta = \arctan\left(\frac{8}{7}\right)$$

ist.
Im ersten Graphen gilt $K = 20$, $h = 0.05$, im zweiten Graphen haben wir eine verbesserte Methode mit $K = 20$, $h = 0.05$ benutzt. Diese Methode berechnet die neuen Punkte (x_k, y_k) wie folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_k &= x_{k-1} + \frac{h}{2} \\
\tilde{y}_k &= y_{k-1} + \frac{h}{2}\,G(x_{k-1}, y_{k-1}) \\
x_k &= x_{k-1} + h \\
y_k &= y_{k-1} + h\,G(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k).
\end{aligned}$$





6.4 Lineare Differenzialgleichungen

Definition 6.8. Eine Differenzialgleichung der Form

$$y^{(n)}(x) = b(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}(x) \tag{3}$$

heißt **linear**. Ist dabei $b(x) = 0$, sprechen wir von einer **homogenen linearen DGL**. Wenn die $a_i(x)$ konstant sind (unabhängig von x) nennen wir dies eine DGL mit **konstanten Koeffizienten**.

Man kann zeigen, dass eine lineare DGL, sofern die a_i und b auf einem abgeschlossenen Intervall I stetig sind, für jede Wahl von Anfangsbedingungen

$$y(a) = y_0, y'(a) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}$$

genau eine Lösung hat (wobei $a \in I$). Im homogenen Fall bilden die Lösungen von (3) einen n-dimensionalen Vektorraum, d.h. es gibt n linear unabhängige Lösungen auf I. Dabei heißen Abbildungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ linear unabhängig, wenn aus

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i(x) = 0$$

für alle $x \in I$ folgt $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Definition 6.9. Sei I ein Intervall und $y_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ seien auf I mindestens $(n-1)$-mal differenzierbar. Dann heißt

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Wronski-Determinante.

Es gilt:

Satz 6.10. *Seien $y_i(x)$ für $i = 1, \ldots, n$ auf einem Intervall I definierte Funktionen. Sind alle $y_i b$ mindestens $(n-1)$-mal differenzierbar und gibt es ein $a \in I$ mit $W(a) \neq 0$, so sind die y_i linear unabhängig.*

Die Lösungen einer homogenen linearen DGL bilden einen Vektorraum. Die Lösungen einer inhomogenen linearen DGL bilden einen affinen Raum. Genauer: Sei y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (3) und sei Y_h die Menge der Lösungen der homogenen DGL sowie Y_i die Menge der Lösungen der inhomogenen DGL (also insbesondere $y_p \in Y_i$). Dann gilt

$$Y_i = Y_h + y_p = \{y + y_p \, : \, y \in Y_i\}.$$

6.5 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten

$$\boxed{y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x),}$$

wobei $a(x)$ und $b(x)$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, stetig auf einem abgeschlossenen Intervall I sind.
Die Lösungsmenge Y_i der homogenen DGL $y' = a(x)y$ besteht aus den Funktionen

$$y(x) \;=\; c\, e^{A(x)}, \quad x \in I,$$

wobei $A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$, und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist (Separation der Variablen).
Wir suchen nun eine spezielle Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL $y'(x) = a(x)y(x)+b(x)$: Man kann es mit Raten versuchen, insbesondere wenn $a(x)$ konstant, also unabhängig von x ist. Das funktioniert wie folgt: Wenn $b(x)$ ein Polynom vom Grad n ist, versuchen wir es mit einem Polynom vom Grad n, und wenn $b(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$, dann versuchen wir es mit $A\sin(x) + B\cos(x)$. Ähnlich versuchen wir es mit einer Exponentialfunktion, wenn $b(x)$ eine Exponentialfunktion ist. Entsprechend versuchen wir es mit Summen solcher Funktionen, wenn $b(x)$ Summe von trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen sowie Polynomen ist.
Etwas systematischer: Sei $A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$ wie oben. Sei $W(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x$, $x \in I$. Dann ist

$$y_p(x) \;=\; W(x)\, e^{A(x)},\; x \in I,$$

eine Lösung der inhomogenen DGL. Die Idee dabei ist folgende: Wir wissen, dass die Menge der Lösungen der homogenen DGL die Menge

$$c \cdot e^{A(x)}$$

ist. Wir versuchen nun den Ansatz

$$y_p(x) = c(x) \cdot e^{A(x)},$$

d.h. wir ersetzen die Konstante c durch eine Abbildung $c(x)$ (*Variation der Konstanten*).

Beispiel 6.11. Sei $a(x) = a_0$ konstant, $a_0 \neq 0$, und $b(x) = b_0$ konstant: Betrachte die inhomogene DGL

$$y' = a_0 \cdot y + b_0.$$

Dann ist $A(x) = \int a_0\,\mathrm{d}x \; = a_0 x$ und damit ist $e^{a_0 x}$ eine Basislösung der homogenen DGL. Wir können nun für eine Lösung der inhomogenen DGL $y_p(x) = c_0$ raten: Es gilt $c_0 = \frac{-b_0}{a_0}$ und wir erhalten

$$y(x) \;=\; \frac{-b_0}{a_0} \;+\; c\, e^{a_0 x},\; x \in I,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Mit Variation der Konstanten erhalten wir natürlich dasselbe Ergebnis.

Beispiel 6.12. Sei, wie oben, $a(x) = a_0$ und $b(x) = b_0 \cos(\omega x)$, $(b_0 > 0\,, \omega > 0)$,

$$y' = a_0 y \,+\, b_0 \cos(\omega x).$$

Die homogene DGL hat die Lösungsmenge $c\,e^{a_0 x}$, wie vorhin. Für eine spezielle Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x).$$

Setze dies in die DGL ein:

$$-\omega\, A\, \sin(\omega x) \;+\; \omega\, B\, \cos(\omega x) \;-\; a_0\, A\, \cos(\omega x) \;-\; a_0\, b\, \sin(\omega x) = b_0\, \cos(\omega x).$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} -\omega A - a_0 B &= 0 \\ -a_0 A + \omega B &= b_0. \end{aligned}$$

Das gibt die Lösungen

$$A = \frac{-a_0 b_0}{\omega^2 + a_0^2}, \quad B = \frac{b_0 \omega}{\omega^2 + a_0^2},$$

also

$$y_p(x) = \frac{b_0}{\sqrt{\omega^2 + a_0^2}} \left(\frac{-a_0}{\sqrt{\omega^2 + a_0^2}} \cos(\omega x) + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + a_0^2}} \sin(\omega x) \right).$$

Unter Benutzung der Additionstheorem für trigonometrische Funktionen

$$\cos(\omega x - \beta) = \cos(\beta) \cos(\omega x) + \sin(\beta) \sin(\omega x),$$

erhalten wir

$$\tan(\beta) = \frac{-\omega}{a_0}.$$

Ein konkretes Beispiel: Löse $y' = -7y + 10 \cos(8x)$, $y(0) = 0$.

$$y(x) \;=\; \frac{10}{\sqrt{113}} \cos(8x - \beta) \;+\; c\,e^{-7x},$$

$\beta = \arctan\left(\frac{8}{7}\right)$. Die Variable c wird aus $y(0) = 0$ bestimmt: $\frac{10}{\sqrt{113}} \cos(-\beta) + c = 0$, $c = -\frac{70}{113}$.

Beispiel 6.13. Wir betrachten

$$y'(x) + \frac{1}{2x} \cdot y(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x.$$

Hier ist
$$A(x) = \int \frac{-1}{2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln x,$$
also ist
$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
eine Basislösung der entsprechenden homogenen DGL.
Variation der Konstanten zur Lösung der inhomogenen DGL:
$$y_p(x) = c(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Einsetzen in die DGL liefert
$$c'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{-1}{\sqrt{x}} \cdot 12x = \sqrt{x}\sin x - \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$
also $c'(x) = x \cdot \sin x$. Mit partieller Integration erhalten wir $c(x) = \sin x - x\cos x$. Die allgemeine Lösung der DGL ist also
$$y(x) = (\sin x - x\cos x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + c \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Wenn wir noch eine Anfangsbedingung hätten, könnten wir c bestimmen, z.B. gilt für $y(\pi) = 2\sqrt{\pi}$ (einsetzen!)
$$2\sqrt{\pi} = \frac{c}{\sqrt{\pi}} + \frac{\pi}{\sqrt{\pi}},$$
also $c = \pi$ und als Lösung des Anfangswertproblems
$$y(x) = \frac{\sin x - x\cos x + \pi)}{\sqrt{x}}.$$